CAPITOLUL 4

RELAŢII DE ECHIVALENŢĂ

1. Relaţii de echivalenţă

Definiţie 4.1.1. *Relaţie binară ρ pe mulţimea X se numeşte relaţie de echivalenţă, dacă ea posedă următoarele proprietăţi:*

1) $\forall x \in X \quad x\rho x$ (reflexivitate);

2) $\forall x, y \in X \ (x\rho y \ \Rightarrow \ y\rho x)$ (simetrie);

3) $\forall x, y, z \in X \ (x\rho y$ şi $y\rho z \ \Rightarrow \ x\rho z)$ (tranzitivitate).

Exemple.

1. Relaţia de egalitate a elementelor unei mulţimi arbitrare X $(x, y \in X \ \ x\rho y \Leftrightarrow x = y)$ este o relaţie de echivalenţă.

2. Relaţia de asemănare a triunghiurilor din plan este o relaţie de echivalenţă.

Teorema 4.1.1. *Fie $(\rho_i)_{i\in I}$ – o familie de relaţii de echivalenţă pe mulţimea X. Atunci $\rho = \bigcap\limits_{i\in I} \rho_i$ este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea X.*

Demonstraţie. Cum pentru fiecare $x \in X$ avem $(x, x) \in \rho_i$ $(\forall i \in I)$, rezultă $(x, x) \in \bigcap\limits_{i\in I} \rho_i = \rho$, adică ρ este o relaţie reflexivă.

Fie $x, y \in X$ cu proprietatea $(x, y) \in \rho$. Atunci $(x, y) \in \rho_i$ $(\forall i \in I)$, şi cum ρ_i este o relaţie simetrică, rezultă $(y, x) \in \rho_i$ $(\forall i \in I)$ şi, prin urmare, $(y, x) \in \bigcap\limits_{i\in I} \rho_i = \rho$. Aşadar, ρ este o relaţie simetrică.

Fie $x, y, z \in X$ cu proprietatea $(x, y) \in \rho$ şi $(y, z) \in \rho$. Atunci $(x, y) \in \rho_i$ şi $(y, z) \in \rho_i$ $(\forall i \in I)$. Conform tranzitivităţii relaţiilor ρ_i, avem $(x, z) \in \rho_i$ $(\forall i \in I)$, şi, prin urmare, $(x, z) \in \rho$. Deci, ρ este o relaţie tranzitivă. Teorema este demonstrată.

Teorema 4.1.2. *Fie ρ – o relaţie binară simetrică arbitrară pe mulţimea X. Atunci relaţia binară*

$$\rho^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n$$

este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea X.

Demonstraţie. Cum $\Delta_X = \rho^0 \subset \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \rho^n = \rho^*$, ρ^* este o relaţie reflexivă.

Pentru a demonstra că ρ^* este o relaţie simetrică, vom demonstra, utilizând inducţia matematică după $n \in \mathbb{N}^*$, că ρ^n este simetrică. Din condiţiile teoremei rezultă, că ρ^1 este o relaţie simetrică. Vom stabili simetria relaţiei ρ^{n+1}, în presupunerea că ρ^n este simetrică ($n \in \mathbb{N}^*$). Pentru orice $x, z \in X$ din condiţia $(x, z) \in \rho^{n+1}$ rezultă existenţa $y \in X$ cu proprietatea $(x, y) \in \rho^n$ şi $(y, z) \in \rho$. Cum ρ^n şi ρ sunt relaţii simetrice, $(z, y) \in \rho$ şi $(y, x) \in \rho^n$ şi, prin urmare, $(z, x) \in \rho^n \circ \rho = \rho^{n+1}$. Aşadar, conform inducţiei matematice, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ relaţia ρ^n este simetrică.

Considerând acum elementele arbitrare $x, y \in X$ cu proprietatea $(x, y) \in \rho^*$, se obţine $(x, y) \in \rho^n$ pentru un oarecare $n \in \mathbb{N}$. Din simetria relaţiei ρ^n rezultă $(y, x) \in \rho^n$, şi, prin urmare, $(y, x) \in \rho$. Aşadar, relaţia ρ^* este simetrică.

Fie $x, y, z \in X$ – elementele arbitrare din X cu proprietatea $(x, y) \in \rho^*$ şi $(y, z) \in \rho^*$. Din modul de definire a lui ρ se obţine $(x, y) \in \rho^n$ şi $(y, z) \in \rho^m$ pentru careva $m, n \in \mathbb{N}$. Atunci $(x, z) \in \rho^m \circ \rho^n = \rho^{m+n}$, adică $(x, z) \in \rho^*$, deci relaţia ρ^* este tranzitivă. Teorema este demonstrată.

Consecinţă 4.1.1. *Pentru fiecare relaţie binară ρ pe mulţimea X relaţia*

$$\widetilde{\rho} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\rho \cup \rho^{-1})^n$$

este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea X.

Demonstraţie. Cum relaţia $\rho \cup \rho^{-1}$ este simetrică, afirmaţia rezultă din teorema precedentă.

Definiţie 4.1.2. *Fie ρ – relaţie de echivalenţă pe mulţimea X. Mulţimea*

$$[x]_\rho = \{y \in X \mid y\rho x\}$$

se numeşte clasă de echivalenţă, asociată elementului x prin relaţia ρ.

Definiţie 4.1.3. *Mulţimea*

$$X \Big/ \rho = \{[x]_\rho \mid x \in X\}$$

se numeşte mulţime factor a mulţimii X prin relaţia ρ.

Exemplu. Considerăm pe mulţimea $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ relaţia de echivalenţă $x\rho y \Leftrightarrow xy > 0$. Atunci

$$\forall x > 0 \ \Rightarrow \ [x]_\rho = \{y \in \mathbb{R} \mid y \cdot x > 0\} = (0, +\infty).$$

Similar, pentru fiecare $x < 0$ se obţine $[x]_\rho = (-\infty, 0)$. Prin urmare,

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \big/ \rho = \{(-\infty, 0), (0, +\infty)\}.$$

Definiţie 4.1.4. *Fie ρ – o relaţie de echivalenţă pe mulţimea X. Aplicaţia*

$$p_{X,\rho} : X \to X \big/ \rho, \qquad p_{X,\rho}(x) = [x]_\rho$$

se numeşte aplicaţie canonică a mulţimii X pe mulţimea factor $X \big/ \rho$.

Teorema 4.1.3. *Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea X. Atunci următoarele afirmaţii sunt juste:*

1) fiecare element aparţine clasei de echivalenţă, a cărei reprezentant este el, adică

$$\forall x \in X \quad \Rightarrow \quad x \in [x]_\rho;$$

2) reuniunea tuturor claselor de echivalenţă formează mulţimea X,

$$X = \bigcup_{x \in X} [x]_\rho;$$

3) două clase de echivalenţă sunt egale atunci şi numai atunci, când reprezentanţii lor sunt echivalenţi, adică

$$\forall x, y \in X \quad ([x]_\rho = [y]_\rho \quad \Leftrightarrow \quad x\rho y);$$

4) oricare două clase de echivalenţă sau coincid sau nu se intersectează, adică

$$\forall x, y \in X \quad ([x]_\rho = [y]_\rho \ \textit{sau} \ [x]_\rho \cap [y]_\rho = \varnothing).$$

Demonstraţie.

1. Pentru fiecare $x \in X$ din reflexivitatea relaţiei ρ rezultă $x\rho x$, prin urmare, $x \in [x]_\rho$.

2. Cum pentru fiecare $x \in X$ are loc $[x]_\rho \subset X$, rezultă $\bigcup\limits_{x \in X} [x]_\rho \subset X$. Cum pentru fiecare $x \in X$ din afirmaţia 1) rezultă $x \in [x]_\rho$, deci $x \in \bigcup\limits_{y \in X} [y]_\rho$, şi, prin urmare, $X \subset \bigcup\limits_{y \in X} [y]_\rho$.

3. Dacă $[x]_\rho = [y]_\rho$, atunci, conform afirmaţiei 1), $x \in [x]_\rho$, şi, prin urmare, $x \in [y]_p$, de unde rezultă $x\rho y$.

Dacă $x\rho y$, atunci pentru fiecare $t \in [x]_\rho$ urmează $t\rho x$. Ţinând seamă că $x\rho y$ şi ρ este o relaţie tranzitivă, se obţine $t\rho y$. Prin urmare, $[x]_\rho \subset [y]_p$. Similar se demonstrează incluziunea $[y]_\rho \subset [x]_\rho$.

4. Fie $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ şi $t_0 \in [x]_\rho \cap [y]_\rho$. Atunci $x\rho t_0$ şi $t_0\rho y$, şi, prin urmare, $x\rho y$. Atunci, conform afirmaţiei 3), $[x]_\rho = [y]_\rho$.

Teorema 4.1.4. *Fie ρ, ρ' – relaţii de echivalenţă pe mulţimile X şi respectiv Y, $f : X \to Y$ o funcţie cu proprietatea*

$$\forall x, y \in X \qquad (x\rho y \;\Rightarrow\; f(x)\rho' f(y)).$$

Atunci există o funcţie unică $\widetilde{f} : X\big/_{\rho} \to Y\big/_{\rho'}$, astfel încât

$$\widetilde{f} \circ p_{X,\rho} = p_{Y,\rho'} \circ f,$$

adică diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & X & \xrightarrow{f} & Y & \\ p_{X,\rho} & \downarrow & & \downarrow & p_{Y,\rho'} \\ & X\big/\rho & \xrightarrow{\widetilde{f}} & Y\big/\rho' & \end{array}$$

este comutativă.

Demonstraţie.

Existenţa. Definim $\widetilde{f} : X\big/\rho \to Y\big/\rho'$ prin egalitatea $\widetilde{f}([x]_\rho) = [f(x)]_{\rho'}$. Dacă $[x]_\rho = [y]_\rho$, atunci $x\rho y$ şi, prin urmare, $f(x)\rho' f(y)$, adică $[f(x)]_{\rho'} = [f(y)]_{\rho'}$. Aşadar, definiţia funcţiei este corectă.

Pentru fiecare $x \in X$ se obţine

$$\left(\widetilde{f} \circ p_{X,\rho}\right)(x) = \widetilde{f}([x]_\rho) = [f(x)]_{\rho'} = \left(p_{Y,\rho'} \circ f\right)(x),$$

de unde rezultă egalitatea $\widetilde{f} \circ p_{X,\rho} = p_{Y,\rho'} \circ f$.

Unicitatea. Fie $\widetilde{f} : X\big/\rho \to Y\big/\rho'$ – o funcţie, astfel încât $\widetilde{f} \circ p_{x,\rho} = p_{Y,\rho'} \circ f$. Atunci pentru fiecare $[x]_\rho \in X\big/\rho$ avem

$$\widetilde{f}([x]_\rho) = \left(\widetilde{f} \circ p_{X,\rho}\right)(x) = \left(p_{Y,\rho'} \circ f\right)(x) = [f(x)]_{\rho'},$$

adică funcţia $\widetilde{f}$ numaidecât acţionează conform regulei $\widetilde{f}([x]_\rho) = [f(x)]_{\rho'}$.

Teorema 4.1.5. *Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Atunci sunt juste afirmaţiile:*

1) relaţia $x_1\rho x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea X;

2) funcţia $\widetilde{f} : X\big/\rho \to f(X)$, $\widetilde{f}([x]_\rho) = f(x)$ este definită corect şi este bijectivă;

3) funcţia f se reprezintă ca compoziţie $f = i_{f(X),Y} \circ \widetilde{f} \circ p_{X,\rho}$, unde $i_{f(X),Y} : f(X) \to Y$, $i_{f(X),Y}(y) = y$, adică diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_{X,\rho}} & X/\rho \\ f \big\downarrow & & \big\downarrow \widetilde{f} \\ Y & \xleftarrow{i_{f(X),Y}} & f(X) \end{array}$$

este comutativă.

Demonstraţie. Cum 1 şi 3 sunt evidente, vom demonstra 2.

Verificăm corectitudinea definiţiei $\widetilde{f}$. Dacă $[x]_\rho = [y]_\rho$, atunci $y\rho x$ şi, prin urmare,

$$\widetilde{f}([x]_\rho) = f(x) = f(y) = \widetilde{f}([y]_\rho).$$

Cum pentru fiecare $y \in f(X)$ se obţine $y = f(x)$ pentru un careva $x \in X$, deci $y = \widetilde{f}([x]_\rho)$, rezultă, că funcţia $\widetilde{f}$ este surjectivă.

Fie $[x]_\rho, [y]_\rho \in X/\rho$ – elementele arbitrare, astfel încât $[x]_\rho \neq [y]_\rho$. Atunci $(x, y) \notin \rho$ şi, prin urmare,

$$\widetilde{f}([x]_\rho) = f(x) \neq f(y) = \widetilde{f}([y]_\rho),$$

adică $\widetilde{f}$ este injectivă.

2. Partiţie a unei mulţimi

Definiţie 4.2.1. *O familie de mulţimi $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ se numeşte partiţie a mulţimii nevide X, dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

1) mulţimile X_α nu sunt vide, adică

$$\forall\alpha \in I \;\;\Rightarrow\;\; X_\alpha \neq \varnothing;$$

2) mulţimile X_j sunt disjuncte, adică

$$\forall\alpha, \beta \in I \quad (\alpha \neq \beta \;\;\Rightarrow\;\; X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing);$$

3) reuniunea familiei de mulţimi $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ este X, adică

$$\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha = X.$$

Mulţimea partiţiilor, ce se pot defini pe mulţimea X, se notează cu $Part(X)$.

Exemplu. Familia de mulţimi $X_i = \{n \in \mathbb{Z} \mid n - i \text{ se divide prin } 5\}$, $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ este o partiţie a mulţimii $\mathbb{Z}$.

(1) Mulţimile X_i nu sunt vide, de exemplu $i \in X_i$, $(i = \overline{0, 4})$.

(2) Mulţimile X_i sunt disjuncte două câte două. În adevăr, în caz contrar există $x \in X_i \cap X_j$ $(0 \leq i < j < 5)$, de unde $5|x - i$ şi $5|x - j$. Prin urmare, $5|(x - i) - (x - j)$, de unde $5|j - i$, ceea ce contrazice $0 < j - i < 5$.

(3) Incluziunea $\bigcup\limits_{i=0}^{4} X_i \subset \mathbb{Z}$ este evidentă. Să demonstrăm incluziunea $\mathbb{Z} \subset \bigcup\limits_{i=0}^{4} X_i$. Fie $n \in \mathbb{Z}$ un element arbitrar şi j – restul de la împărţirea lui la 5. Atunci $n - j$ se divide cu 5, şi, prin urmare, $n \in X_j \subset \bigcup\limits_{i=0}^{4} X_i$.

Definiţie 4.2.2. *Două partiţii $\alpha = (X_i)_{i \in I}$ şi $\beta = (Y_j)_{j \in J}$ pe mulţimea X se numesc echivalente (notaţie $\alpha \sim \beta$), dacă există o funcţie bijectivă $f : I \to J$, astfel încât $X_i = Y_{f(i)}$ oricare ar fi $i \in I$.*

Teorema 4.2.1. *Relaţia $\sim$ pe mulţimea $Part(X)$ este o relaţie de echivalenţă.*

Demonstraţie. Pentru fiecare $\alpha = (X_i)_{i \in I} \in Part(X)$, funcţia $\mathbf{1}_X : I \to I$ este o bijecţie şi $\forall i \in I \quad X_i = X_{\mathbf{1}_X(i)}$. Prin urmare, $\alpha \sim \alpha$, şi relaţia $\sim$ este reflexivă.

Considerăm partiţiile arbitrare $\alpha = (X_i)_{i \in I}$ şi $\beta = (Y_j)_{j \in J}$ pe mulţimea X, astfel încât $\alpha \sim \beta$. Atunci există o funcţie bijectivă $f : I \to J$, astfel încât $\forall i \in I \ X_i = Y_{f(i)}$. Prin urmare, funcţia $f^{-1} : J \to I$ este bijectivă şi $\forall j \in J \ X_{f^{-1}(j)} = Y_j$, adică $\beta \sim \alpha$. Aşadar, relaţia $\sim$ este simetrică.

Pentru a demonstra tranzitivitatea relaţiei $\sim$, considerăm partiţiile $\alpha = (X_i)_{i \in I}$, $\beta = (Y_j)_{j \in J}$, $\gamma = (Z_k)_{k \in K}$, astfel încât $\alpha \sim \beta$ şi $\beta \sim \gamma$. Atunci există funcţiile bijective $f : I \to J$, $g : J \to K$, astfel încât:

$$\forall i \in I \quad X_i = Y_{f(i)} \qquad \text{şi} \qquad \forall j \in J \quad Y_j = Z_{g(j)}.$$

Cum funcţia $g \circ f : I \to K$ este bijecţie, şi se verifică proprietatea

$$\forall i \in I \quad X_i = Y_{f(i)} = Z_{g(f(i))},$$

rezultă $\alpha \sim \gamma$, şi deci, relaţia $\sim$ este tranzitivă.

Teorema 4.2.2. *Fie $\alpha = (X_i)_{i \in I}$ o partiţie a mulţimii X. Atunci relaţia binară $\rho = \varphi(\alpha)$ pe X, definită astfel*

$$\rho = \bigcup_{i \in I} (X_i \times X_i), \quad \textit{adică} \quad x \rho y \ \Leftrightarrow \ \exists i \in I \ x \in X_i \ \textit{şi} \ y \in X_i, \tag{1}$$

este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea X.

Demonstraţie. Fie $x \in X$ arbitrar. Cum α este o partiţie pe X, rezultă, că există $i \in I$ cu proprietatea $x \in X_i$. Aşadar, $x\rho x$, şi relaţia ρ este reflexivă.

Fie $x, y \in X$ – două elemente, astfel încât $x\rho y$. Atunci există $i \in I$ cu proprietatea $x \in X_i \wedge y \in X_i$. Rezultă, că $y \in X_i$ şi $x \in X_i$, adică $y\rho x$, şi relaţia ρ este simetrică.

Verificăm tranzitivitatea. Fie $x, y, z \in X$, ce verifică condiţiile $x\rho y \wedge y\rho z$. Atunci pentru careva $i, j \in I$ avem $x \in X_i \wedge y \in X_i \wedge y \in X_j \wedge z \in X_j$. Cum pentru $i \neq j$ $X_i \cap X_j = \varnothing$, rezultă $i = j$ şi $x \in X_i \wedge z \in Z_i$, adică $x\rho z$, şi ρ – tranzitivă.

Teorema 4.2.3. *Funcţia $\varphi : Part(X) \to \mathcal{R}(x)$ definită de (1), verifică următoarele proprietăţi:*

1) funcţia φ este surjectivă;

2) partiţiile α şi β sunt echivalente atunci şi numai atunci, când $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, adică $\forall \alpha, \beta \in Part(X) \quad (\alpha \sim \beta \;\Leftrightarrow\; \varphi(\alpha) = \varphi(\beta))$.

Demonstraţie.

1. Fie $\rho \in \mathcal{R}(X)$ – o relaţie de echivalenţă arbitrară, $\alpha = (X_i)_{i \in I}$, unde $I = X/\rho$, $X_i = i$. Conform teoremei 4.1.3, familia α este o partiţie a mulţimii X.

Conform teoremei 4.1.3, pentru orice $x, y \in X$ condiţia $x\rho y$ este echivalentă condiţiei $x\varphi(\alpha)y$, adică existenţa $X_i \in X/\rho$ cu proprietăţile $x \in X_i \wedge y \in X_i$. În adevăr, dacă $x\rho y$, conform teoremei 4.1.3, putem considera $X_i = [x]_\rho = [y]_\rho$. Dacă pentru un careva $[z]_\rho = X_i$ se verifică proprietăţile $x \in X_i \wedge y \in X_i$, atunci în baza definiţiei 4.1.2, $z\rho x \wedge z\rho y$. Utilizând simetria şi tranzitivitatea relaţiei ρ, se obţine $x\rho y$.

Aşadar, $\varphi(\alpha) = \rho$, deci, funcţia φ este surjectivă.

2. Fie partiţiile $\alpha = (X_i)_{i \in I}$, $\beta = (Y_j)_{j \in J}$ – echivalente. Atunci există o funcţie bijectivă $f : I \to J$ cu proprietatea $\forall i \in I \;\, X_i = Y_{f(i)}$. Rezultă, că

$\forall x, y \in X \;\; x\varphi(\beta)y \;\Leftrightarrow\; \exists j \in J \;\, x \in Y_j \wedge y \in Y_j \;\Leftrightarrow\; \exists i \in I \;\, j = f(i) \wedge x \in Y_j \wedge y \in Y_j \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; \exists i \in I \;\, x \in X_i \wedge y \in X_i \;\Leftrightarrow\; x\varphi(\alpha)y$,

de unde $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.

Fie acum, că pentru partiţiile $\alpha = (X_i)_{i \in I}$ şi $\beta = (Y_j)_{j \in J}$ se verifică $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Să demonstrăm, că $\alpha \sim \beta$. Vom verifica, că funcţia

$$f : I \to J, \qquad f(i) = j \;\Leftrightarrow\; X_i = Y_j$$

este definită corect şi este bijecţie.

Fixăm un element arbitrar $x \in X_i$. Cum β este o partiţie a mulţimii X, există aşa un Y_j cu proprietate $x \in Y_j$. Atunci

$$y \in X_i \;\Leftrightarrow\; x\varphi(\alpha)y \;\Leftrightarrow\; x\varphi(\beta)y \;\Leftrightarrow\; y \in Y_j,$$

şi, prin urmare, $X_i = Y_j$. Aşadar,

$$\forall X_i \in \alpha \quad \exists! Y_j \in \beta \quad X_i = Y_j.$$

Cum partiţiile α şi β sunt arbitrare, $\forall Y_j \in \beta \quad \exists! X_i \in \alpha \quad X_i = X_j$, şi, prin urmare, funcţia f este surjectivă.

Cum diferite elemente ale partiţiilor sunt disjuncte două câte două, rezultă, că funcţia f este injectivă.

Aşadar, funcţia $f : I \to J$ cu $X_i = Y_{f(i)}$ este bijecţie, ceea ce demonstrează echivalenţa $\alpha \sim \beta$.

Consecinţă 4.2.1. *Funcţia*

$$\widetilde{\varphi} : PartX/\sim \longrightarrow \mathcal{R}(X), \quad \widetilde{\varphi}([\alpha]_\sim) = \varphi(\alpha) \tag{2}$$

este definită corect şi este bijectivă.

Afirmaţia rezultă din teorema precedentă şi teorema 4.1.5.

Teorema 4.2.4. *Fie X – o mulţime nevidă, ρ – o relaţie de echivalenţă pe X. Fie $I = X/\rho$, funcţia $\mathbf{1}_{X/\rho} : I \to X/\rho$ şi $X_i = \mathbf{1}_{X/\rho}(i)$, $i \in I$. Atunci familia $\alpha = \psi(\rho) = (X_i)_{i \in I}$ este o partiţie a mulţimii X.*

Demonstraţie. Conform teoremei 4.1.3, au loc proprietăţile:

1) fiecare clasă de echivalenţă $X_i \in X/\rho$ este o mulţime nevidă;

2) dacă clasele de echivalenţă $X_i, X_j \in X/\rho$ nu coincid, intersecţia lor e vidă;

3) $\bigcup\limits_{i \in I} X_i = X$.

Prin urmare, familia $(X_i)_{i \in I}$ este o partiţie a mulţimii X.

Teorema 4.2.5. *Funcţia*

$$\widetilde{\psi} : \mathcal{R}(X) \to Part(X)/\sim, \quad \widetilde{\psi} = [\psi(\rho)]_\sim,$$

unde funcţia ψ este definită în teorema precedentă şi funcţia $\widetilde{\varphi}$, definită de relaţia (2), *sunt reciproc inverse.*

Demonstraţie. Pentru fiecare $\rho \in \mathcal{R}(X)$ avem $(\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi})(\rho) = \widetilde{\varphi}([\psi(\rho)]_{\sim}) = \varphi(\psi(\rho))$. Ţinând seamă, că

$$\psi(\rho) = (X_i)_{i \in I}, \text{ unde } I = X/\rho,\ X_i = \mathbf{1}_{X/\rho}(i),\ i \in I,$$

pentru orice $x, y \in X$ se obţine

$$(x, y) \in \varphi(\psi(\rho)) \;\Leftrightarrow\; \exists i \in I\ x, y \in X_i \;\Leftrightarrow\; \exists i \in X/\rho : x, y \in X_i \;\Leftrightarrow\; (x, y) \in \rho.$$

Prin urmare,

$$(\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi})(\rho) = \rho, \quad \text{şi deci, } \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi} = \mathbf{1}_{\mathcal{R}(X)}.$$

Cum funcţia $\widetilde{\varphi}$ este bijectivă (a se vedea consecinţă 4.2.1.), rezultă $\widetilde{\psi} = \widetilde{\varphi}^{-1}$.