6. Numere cardinale

1. Utilizând definiţia echivalenţei să se demonstreze echivalenţa următoarelor mulţimi:

1.1. $\mathbb{R}, \quad (2; +\infty)$;

1.2. $(-\infty; -1), \quad (3; +\infty)$;

1.3. $(-1; 2), \quad \mathbb{R}$;

1.4. $(-2; 1), \quad (-1; +\infty)$;

1.5. $[1; 5), \quad (-7; 3]$;

1.6. $\mathbb{N}, \quad \{0, 3, 6, 9, ...\}$;

1.7. $\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}^2$;

1.8. $\mathbb{Z}, \quad \mathbb{N} \cup \{\pi\}$;

1.9. $(0; 1), \quad [0; 1]$;

1.10. $(0; 1) \cup (2; 3), \quad [0; 1]$.

2. Utilizând definiţia puterii mulţimii să se determine puterea următoarelor mulţimi:

2.1. $(-\infty; 2)$;

2.2. $(-\infty; 1]$;

2.3. $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$;

2.4. $(-5; 7)$;

2.5. $(-1; 1]$;

2.6. $\{1, 2, 4, 8, 16, ...\}$.

3. Să se determine puterea mulţimilor ce urmează, utilizând teorema Cantor-Bernstain:

3.1. $[0; 1]$;

3.2. $[0; 1] \cup [2; 3) \cup (4; 5]$;

3.3. $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$;

3.4. $\mathbb{R}^2$;

3.5. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$;

3.6. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$;

3.7. mulţimea tuturor şirurilor de numere raţionale;

3.8. mulţimea tuturor şirurilor crescătoare de numere raţionale;

3.9. mulţimea tuturor triunghiurilor scalene din plan cu coordonate raţionale ale vârfurilor;

3.10. mulţimea tuturor submulţimilor finite din $\mathbb{C}$;

3.11. mulţimea tuturor funcţiilor din $\mathbb{N}$ în $\mathbb{N}$;

3.12. mulţimea tuturor corespondenţelor din $\mathbb{N}$ în $\mathbb{N}$.

4. Să se demonstreze că dacă $\mathrm{Card}(A \cup B) = c$, atunci $\mathrm{Card}A = c$ sau $\mathrm{Card}B = c$.

5. Să se demonstreze că dacă $\mathrm{Card}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = c$, atunci $\exists j : \mathrm{Card}A_j = c$.

6. Să se demonstreze că pentru orice mulţime infinită A se verifică

$$\mathrm{Card}(A \times A) = \mathrm{Card}A.$$

7. Să se demonstreze că pentru mulţimile infinite A, B are loc

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \max(\mathrm{Card}A, \mathrm{Card}B).$$

8. Oare poate fi planul acoperit cu litere T de diferite dimensiuni şi care nu se intersectează?

9. Să se demonstreze următoarele proprietăţi ale numerelor cardinale:

9.1. $(\alpha \cdot \beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma} \cdot \beta^{\gamma}$;

9.2. $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$;

9.3. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$.

10. Să se efectueze următoarele operaţii cu numere cardinale:

10.1. $\aleph_0 + 1$;

10.2. $\aleph_0 + 100$;

10.3. $3 \cdot \aleph_0$;

10.4. $\aleph_0^2$;

10.5. $\aleph_0^2 + 2\aleph_0$;

10.6. $\aleph_0^3 + 3\aleph_0^2 + 1$;

10.7. ${\aleph_0}^{\aleph_0}$;

10.8. $2^{\aleph_0}$;

10.9. $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} 2^n$;

10.10. $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \aleph_0^n$;

10.11. $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} n!$;

10.12. $10^{\aleph_0}$;

10.13. c^2;

10.14. $c^3 + 2c^2 + 3$;

10.15. $c + \aleph_0$;

10.16. $c^{\aleph_0}$.