S. Corsac, A. Corlat

CULEGERE DE PROBLEME LA TEORIA MULŢIMILOR

Chişinău – 2004

1. Noţiunea de mulţime

1. Să se enumere următoarele mulţimi:

a) mulţimea tuturor numerelor naturale, ale căror pătrate sunt mai mici ca 100;

b) mulţimea tuturor numerelor întregi, ale căror pătrate nu întrec 50;

c) mulţimea tuturor numerelor prime, cuprinse între 10 şi 30;

d) mulţimea tuturor numerelor impare cel mult egale cu 29;

e) mulţimea tuturor rapoartelor ce pot fi alcătuite cu numerele 3, 5 şi 7;

f) mulţimea tuturor numerelor de trei cifre distincte ce pot fi formate din cifrele 0, 1 şi 2;

g) mulţimea divizorilor numărului 2310;

h) mulţimea multiplilor lui 5, cuprinşi între 49 şi 81;

i) mulţimea numerelor prime pare;

j) mulţimea numerelor întregi din segmentul [-2;3].

2. Fiind date toate elementele unei mulţimi, să se gasească o descriere pentru această mulţime:

a) {dolar, euro, leu, grivnă, rublă, ..., yen};

b) {triunghi echilateral, pătrat, pentagon, hexagon, ...};

c) {"Luceafărul", "La steaua", "Epigonii", "Scrisoarea a II"};

d) {ianuarie, martie, mai, iulie, august, octombrie, decembrie};

e) {2, 4, 8, 16, 32, ...};

f) {1, 8, 27, 64, ...};

g) {11, 13, 17, 19, 23, ..., 83, 89, 97};

h) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};

i) {admis, respins};

j) {USM, UTM, ASEM, ..., ULIM}.

3. Să se determine mulţimea:

a) $\{x \in \mathbb{N} \ : \ x^2 - x - 2 = 0\}$;

b) $\{x \in \mathbb{Z} \ : \ x^2 - x - 2 = 0\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^4 + 13x^2 + 36 = 0\}$;

d) $\{x \in \mathbb{C} \ : \ x^4 + 13x^2 + 36 = 0\}$;

e) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x(x+1)(x+2)(x+3) = 24\}$;

f) $\{x \in \mathbb{Z} \;\;:\;\; x^2 - 6|x| + 8 = 0\}$;

g) $\{x \in \mathbb{R} \;\;:\;\; \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x\}$;

h) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \;\;:\;\; 2(x-1) + 3(x-2) = 5x - 8\}$;

i) $\{x \in \mathbb{N} \;\;:\;\; \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11\}$;

j) $\{x \in \mathbb{N} \;\;:\;\; 5 \cdot 36^x = 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x\}$;

k) $\{x \in \mathbb{Z} \;\;:\;\; 2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0\}$;

l) $\{x \in \mathbb{R} \;\;:\;\; 5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}\}$;

m) $\{x \in \mathbb{R} \;\;:\;\; 6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2\}$;

n) $\{x \in \mathbb{Z} \;\;:\;\; \sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0\}$;

o) $\{x \in \mathbb{N} \;\;:\;\; \sqrt{3x - x^2} < 4 - x\}$;

p) $\{x \in \mathbb{Z} \;\;:\;\; |x^2 - 5x| < 6\}$;

r) $\{x \in \mathbb{Z} \;\;:\;\; (0,(4))^{x^2-1} > (0,(6))^{x^2+6}\}$;

s) $\{x \in \mathbb{N} \;\;:\;\; \frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}\}$.

4. Să se reprezinte în sistemul cartezian de coordonate următoarele mulţimi:

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;:\;\; x + y - 1 = 0\}$;

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;:\;\; x^2 - y^2 \leq 0\}$;

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;:\;\; (x^2 - 4)(y - 1) = 0\}$;

d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;:\;\; x^2 + y^2 \leq 9\}$;

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;:\;\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$;

f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;:\;\; (x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) \geq 0\}$;

g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;:\;\; |x| + |y| \leq 1\}$;

h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;:\;\; |x| \leq |x + y|\}$;

i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;:\;\; \log_2(xy + \frac{1}{xy}) = 1 - (x + y - 2)^2\}$;

j) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;:\;\; \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1\}$.

5. Să se arate relaţia adevărată:

a) $\{a,b\} \in \{a,b,\{a,b,c\}\}$ sau $\{a,b\} \subset \{a,b,\{a,b,c\}\}$;

b) $\{a,b\} \in \{a,b,\{a,b\}\}$ sau $\{a,b\} \subset \{a,b,\{a,b\}\}$;

c) $\{a,b\} \in \{a,b\}$ sau $\{a,b\} \subset \{a,b\}$;

d) $\varnothing \in \varnothing$ sau $\varnothing \subset \varnothing$;

e) $a = \{a\}$ sau $a \neq \{a\}$;

f) $\{a\} \subset \{a\}$ sau $a \in \{a\}$;

g) $\varnothing \in \{\varnothing\}$ sau $\varnothing = \{\varnothing\}$.

2. Operaţii cu mulţimi

1. Să se demonstreze identităţile:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

d) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

e) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

f) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

g) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

h) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

i) $A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C) = (A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C$;

j) $A \cap (B \bigtriangleup C) = (A \cap B) \bigtriangleup (A \cap C)$;

k) $A \bigtriangleup (A \bigtriangleup B) = B$;

l) $A \cup B = (A \bigtriangleup B) \bigtriangleup (A \cap B)$;

m) $A \setminus B = A \bigtriangleup (A \cap B)$;

n) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

o) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

p) $A \cup B = (A \bigtriangleup B) \cup (A \cap B)$;

q) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$;

r) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$;

s) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

t) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

u) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$;

v) $(\bigcup\limits_{k \in K} A_k) \cup (\bigcup\limits_{k \in K} B_k) = \bigcup\limits_{k \in K} (A_k \cup B_k)$;

w) $\bigcup\limits_{k \in K} (B \cap A_k) = B \cap (\bigcup\limits_{k \in K} A_k)$;

x) $\bigcup\limits_{k \in K} \bigcup\limits_{t \in T} A_{kt} = \bigcup\limits_{t \in T} \bigcup\limits_{k \in K} A_{kt}$;

y) $\bigcap\limits_{k \in K} \bigcap\limits_{t \in T} A_{kt} = \bigcap\limits_{t \in T} \bigcap\limits_{k \in K} A_{kt}$;

z) $\overline{\bigcup\limits_{k \in K} A_k} = \bigcap\limits_{k \in K} \overline{A_k}$.

2. Să se demonstreze:

a) $A \cup B \subset C \quad \Leftrightarrow \quad A \subset C$ şi $B \subset C$;

b) $A \subset B \cap C \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B$ şi $A \subset C$;

c) $A \cap B \subset C \quad \Leftrightarrow \quad A \subset (\overline{B} \cup C)$;

d) $A \subset B \cap C \quad \Leftrightarrow \quad A \cap \overline{B} \subset C$;

e) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad A \cup C \subset B \cup C$;

f) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad A \cap C \subset B \cap C$;

g) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad (A \setminus C) \subset (B \setminus C)$;

h) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad (C \setminus B) \subset (C \setminus A)$;

i) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \overline{B} \subset \overline{A}$;

j) $A \cup B = A \cap B \quad \Rightarrow \quad A = B$;

k) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad A \cup B = B$;

l) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad A \cap B = A$;

m) $A \subset B \setminus C \quad \Rightarrow \quad A \subset B$ şi $A \not\subset C$;

n) $(B \cup C) \not\subset A \quad \Leftrightarrow \quad (B \setminus A) \cup (C \setminus A) \neq \varnothing$;

o) $A \cup B \subset \overline{A \cap B} \quad \Rightarrow \quad A \cap B = \varnothing$;

p) $A \subset B$ şi $C \subset D \quad \Rightarrow \quad A \cup C \subset B \cup D$;

q) $A \subset B$ şi $C \subset D \quad \Rightarrow \quad A \cap C \subset B \cap D$.

3. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\{a, b\} \cup X = \{a, b, c\} \cap X$;

b) $A \cup X = B \cap X$;

c) $\{a, b\} \cup X = \{a, b, c\}$;

d) $A \cup (B \setminus X) = B \cup X$.

4. Să se rezolve următoarele sisteme şi să se indice pentru ce A, B şi C sistemele au soluţie:

a) $\begin{cases} A \cup X = B \cap X; \\ A \cap X = C \cup X; \end{cases}$ b) $\begin{cases} A \setminus X = X \setminus B; \\ X \setminus A = C \setminus X; \end{cases}$

c) $\begin{cases} A \cap X = B \setminus X; \\ C \cup X = X \setminus A; \end{cases}$ d) $\begin{cases} A \setminus X = B; \\ A \cup X = C; \end{cases}$

e) $\begin{cases} A \cap X = B; \\ A \cup X = C; \end{cases}$ f) $\begin{cases} A \setminus X = B; \\ X \setminus A = C. \end{cases}$

5. Fie $\text{Card}A = 10$, $\text{Card}B = 15$ şi $\text{Card}(A \cap B) = 6$. Să se determine $\text{Card}A \cup B$.

6. Fie $\text{Card}A = 12$, $\text{Card}B = 18$ şi $\text{Card}(A \cup B) = 25$. Să se determine $\text{Card}A \cap B$.

7. Care dintre mulţimile ce urmează sunt numărabile:

a) mulţimea multiplilor lui 3;

b) mulţimea triunghiurilor dreptunghice;

c) mulţimea formată din toate punctele unei drepte;

d) mulţimea fracţiilor $\frac{a}{b}$ cu $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^*$;

e) mulţimea numerelor prime;

f) mulţimea numerelor pare;

g) mulţimea numerelor întregi;

h) mulţimea polinoamelor (de o singură variabilă) cu coeficienţi întregi;

i) mulţimea triunghiurilor din plan, vârfurile cărora au coordonate raţionale;

j) mulţimea punctelor de discontinuitate a unei funcţii monotone definite pe segmentul $[a, b]$;

k) mulţimea funcţiilor raţionale cu coeficienţi întregi la numărător şi numitor;

l) mulţimea tuturor cercurilor din plan de rază $R \in \mathbb{Q}$ şi centrul $O(a, b)$, unde $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$.

3. Corespondenţe

1. Fie date corespondenţele $\alpha = (\mathbb{R}, G, \mathbb{R})$, $\beta = (\mathbb{R}, H, \mathbb{R})$. Să se determine următoarele corespondenţe:

a) α^{-1}, b) β^{-1}, c) $\alpha \circ \beta$, d) $\beta \circ \alpha$

şi să se construiască graficele lor.

1.1. $G = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$, $H = \{(x, y) \mid x \leq 2y\}$.

1.2. $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $H = \{(x, y) \mid x + 3y = 1\}$.

2. Fie dată corespondenţă $\alpha = (\mathbb{R}, G, \mathbb{R})$. Să se determine:

a) $\alpha([0, 1])$, b) $\alpha^{-1}([0, 1])$.

2.1. $G = \{(x, y) \mid x^2 \leq y\}$.

2.2. $G = \{(x, y) \mid |x| + 2|y| \leq 2\}$.

4. Relaţii binare

1. Să se verifice dacă următoarele relaţii binare pe mulţimea indicată X posedă proprietăţile de:

a) reflexivitate, b) simetrie, c) antisimetrie, d) tranzitivitate, e) totalitate.

1.1. $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad |x-y| \leq 1, \ \ X = \mathbb{R}.$

1.2. $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad x|y, \ \ X = \mathbb{N}^*.$

1.3. $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad x|y, \ \ X = \mathbb{Z}^*.$

1.4. $A\rho B \quad \Leftrightarrow \quad A \triangle B$ – mulţime finită, $X = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

2. Să se dea exemple de relaţii binare pe mulţimea indicată X, ce verifică următoarele proprietăţi:

a) reflexivitate, simetrie, tranzitivitate;

b) reflexivitate, simetrie, nu este tranzitivă;

c) reflexivitate, nu este simetrică, tranzitivitate;

d) nu este reflexivă, simetrie, tranzitivitate;

e) nu este reflexivă, nu este simetrică, nu este tranzitivă.

2.1. $X = [0; +\infty)$.

2.2. $X = \mathbb{R}^2$.

3. Fie ρ_1, ρ_2 relaţii binare reflexive pe mulţimea X. Să se verifice dacă relaţiile binare ce urmează sunt reflexive pe X:

a) ρ_1^{-1}, b) $\rho_1 \circ \rho_2$, c) $\rho_1 \cup \rho_2$, d) $\rho_1 \cap \rho_2$.

4. Fie ρ_1, ρ_2 relaţii binare simetrice pe mulţimea X. Să se verifice dacă relaţiile binare ce urmează sunt simetrice pe X:

a) ρ_1^{-1}, b) $\rho_1 \circ \rho_2$, c) $\rho_1 \cup \rho_2$, d) $\rho_1 \cap \rho_2$.

5. Fie ρ_1, ρ_2 relaţii binare tranzitive pe mulţimea X. Să se verifice dacă relaţiile binare ce urmează sunt tranzitive pe X:

a) ρ_1^{-1}, b) $\rho_1 \circ \rho_2$, c) $\rho_1 \cup \rho_2$, d) $\rho_1 \cap \rho_2$.

5. Relaţii de echivalenţă

1. Să se verifice, dacă următoarele relaţii binare ρ sunt relaţii de echivalenţă pe mulţimea data X.

1.1. $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2y \in \mathbb{Z}, \ \ X = \mathbb{R}.$

1.2. $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad xy \geq 0, \ \ X = \mathbb{R}.$

1.3. $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y)$, unde $f : X \to Y$ – o funcţie arbitrară X, Y – mulţimi arbitrare.

1.4. $(a, b)\rho(c, d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc, \ \ X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*.$

1.5. $(a, b)\rho(c, d) \quad \Leftrightarrow \quad 2(a - c) = 5(b - d), \ \ X = \mathbb{R}^2.$

1.6. $A\rho B \quad \Leftrightarrow \quad A \bigtriangleup B \subset C$, unde C – un element fixat al mulţimii $X = \mathcal{P}(Y)$, Y – mulţime arbitrară.

2. Să se determine mulţimea factor a mulţimii X relativ echivalenţa ρ.

2.1. $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z} \quad n < x \leq n + 1 \ \wedge \ n < y \leq n + 1, \quad X = \mathbb{R}.$

2.2. $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{sign} x = \mathrm{sign} y, \ \ X = \mathbb{R}.$

2.3. $(a, b)\rho(c, d) \quad \Leftrightarrow \quad \max\{a, b\} = \max\{c, d\}, \ \ X = \mathbb{R}^2.$

2.4. $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad \sin \frac{\pi x}{2} = \sin \frac{\pi y}{2}, \ \ X = \mathbb{N}.$

3. Care relaţie de echivalenţă ρ induce pe mulţime X cea mai mare diviziune a acestei mulţimi?

4. Care relaţie de echivalenţă ρ induce pe mulţime X cea mai fină diviziune a acestei mulţimi?

5. Fie ρ_1, ρ_2 – relaţii de echivalenţă pe una şi aceeaşi mulţime. Rezultă oare de aici, ca relaţii binare ce urmează sunt relaţii de echivalenţă pe mulţimea dată?

a) ρ_1^{-1}, b) ρ_1^3, c) $\rho_1 \circ \rho_2$, d) $\rho_1 \cup \rho_2$, e) $\rho_1 \cap \rho_2$.

6. Numere cardinale

1. Utilizând definiţia echivalenţei să se demonstreze echivalenţa următoarelor mulţimi:

1.1. $\mathbb{R}, \quad (2; +\infty)$;

1.2. $(-\infty; -1), \quad (3; +\infty)$;

1.3. $(-1; 2), \quad \mathbb{R}$;

1.4. $(-2; 1), \quad (-1; +\infty)$;

1.5. $[1; 5), \quad (-7; 3]$;

1.6. $\mathbb{N}, \quad \{0, 3, 6, 9, ...\}$;

1.7. $\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}^2$;

1.8. $\mathbb{Z}, \quad \mathbb{N} \cup \{\pi\}$;

1.9. $(0; 1), \quad [0; 1]$;

1.10. $(0; 1) \cup (2; 3), \quad [0; 1]$.

2. Utilizând definiţia puterii mulţimii să se determine puterea următoarelor mulţimi:

2.1. $(-\infty; 2)$;

2.2. $(-\infty; 1]$;

2.3. $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$;

2.4. $(-5; 7)$;

2.5. $(-1; 1]$;

2.6. $\{1, 2, 4, 8, 16, ...\}$.

3. Să se determine puterea mulţimilor ce urmează, utilizând teorema Cantor-Bernstain:

3.1. $[0; 1]$;

3.2. $[0; 1] \cup [2; 3) \cup (4; 5]$;

3.3. $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$;

3.4. $\mathbb{R}^2$;

3.5. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$;

3.6. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$;

3.7. mulţimea tuturor şirurilor de numere raţionale;

3.8. mulţimea tuturor şirurilor crescătoare de numere raţionale;

3.9. mulţimea tuturor triunghiurilor scalene din plan cu coordonate raţionale ale vârfurilor;

3.10. mulţimea tuturor submulţimilor finite din $\mathbb{C}$;

3.11. mulţimea tuturor funcţiilor din $\mathbb{N}$ în $\mathbb{N}$;

3.12. mulţimea tuturor corespondenţelor din $\mathbb{N}$ în $\mathbb{N}$.

4. În câte moduri poate fi introdusă relaţia de ordine totală pe o mulţime din 100 de elemente?

5. Să se demonstreze că dacă $\mathrm{Card}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = c$, atunci $\exists j : \mathrm{Card}A_j = c$.

6. Să se demonstreze că pentru orice mulţime infinită A se verifică

$$\mathrm{Card}(A \times A) = \mathrm{Card}A.$$

7. Să se demonstreze că pentru mulţimile infinite A, B are loc

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \max(\mathrm{Card}A, \mathrm{Card}B).$$

8. Oare poate fi planul acoperit cu litere T de diferite dimensiuni şi care nu se intersectează?

9. Să se demonstreze următoarele proprietăţi ale numerelor cardinale:

9.1. $(\alpha \cdot \beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma} \cdot \beta^{\gamma}$;

9.2. $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$;

9.3. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$.

10. Să se efectueze următoarele operaţii cu numere cardinale:

10.1. $\aleph_0 + 1$;

10.2. $\aleph_0 + 100$;

10.3. $3 \cdot \aleph_0$;

10.4. $\aleph_0^2$;

10.5. $\aleph_0^2 + 2\aleph_0$;

10.6. $\aleph_0^3 + 3\aleph_0^2 + 1$;

10.7. ${\aleph_0}^{\aleph_0}$;

10.8. $2^{\aleph_0}$;

10.9. $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} 2^n$;

10.10. $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \aleph_0^n$;

10.11. $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} n!$;

10.12. $10^{\aleph_0}$;

10.13. c^2;

10.14. $c^3 + 2c^2 + 3$;

10.15. $c + \aleph_0$;

10.16. $c^{\aleph_0}$.

7. Relaţii de ordine

1. Să se verifice daca relatiile binare ρ pe multimea X sunt relatii de ordine:

1.1. $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad y-x\in\mathbb{N}, \quad X=\mathbb{R}.$

1.2. $(a,b)\rho(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a-c\le b-d, \;\; X=\mathbb{R}^2.$

1.3. $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad \sin x\le \sin y, \quad X=\mathbb{R}.$

1.4. $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{arctg} x\le \operatorname{arctg} y, \quad X=\mathbb{R}.$

1.5. $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad x|y, \quad X=\mathbb{N}^*.$

1.6. $A\rho B \quad \Leftrightarrow \quad A\subset B, \quad X=\mathcal{P}(Y), \quad Y$ – mulţime arbitrară.

1.7. $f\rho g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)\le g(x), \quad X=\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}.$

2. Fie ρ_1,ρ_2 – relaţii de ordine pe aceeaşi mulţime X. Să se verifice dacă următoarele relaţii vor fi relaţii de ordine pe X:

a) ρ_1^{-1}, b) ρ_1^2, c) $\rho_1\circ\rho_2$, d) $\rho_1\cup\rho_2$, e) $\rho_1\cap\rho_2$.

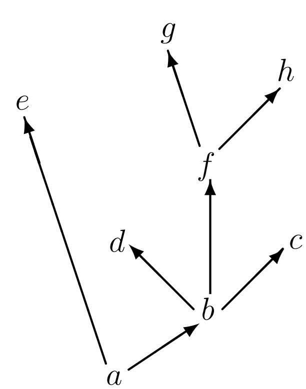
3. Fie (X,ρ) o mulţime ordonată, $A\subset X$. Să se determine:

a) marginile superioare, b) marginile inferioare,

c) elementele maximale, d) elementele minimale.

3.1. $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}; \quad x\rho y \;\Leftrightarrow\; x|y; \quad A=\{2,3,4,5\}.$

3.2. $X=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$; $x\rho y$ atunci şi numai atunci când de la x la y se poate ajunge pe graful indicat urmând direcţia săgeţilor, sau când $x=y$; $A=\{a,b,c,h\}$.



4. În câte moduri poate fi introdusă relaţia de ordine totală pe o mulţime din 100 de elemente?

5. Sunt oare izomorfe mulţimile ordonate date (aici $\le$ se consideră drept relaţie naturală de ordine)?

5.1. $(\mathbb{R},\le), \quad ((0;+\infty),\le).$

5.2. $(\mathbb{R}, \leq)$, $\quad((-\infty; 0], \leq)$.

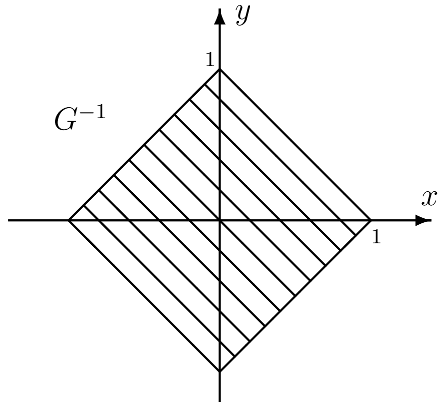
5.3. $(\mathbb{Z}, \leq)$, $\quad(\mathbb{N}, \leq)$.

5.4. $(\mathbb{Z}, \leq)$, $\quad(\mathbb{Q}, \leq)$.

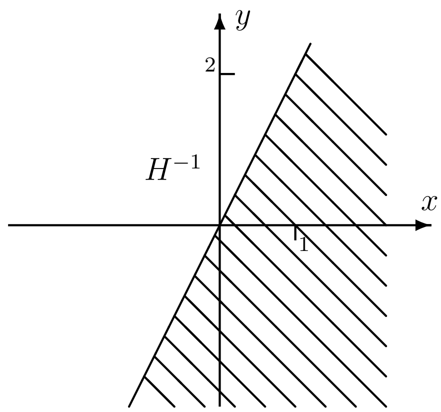
Răspunsuri

§3 1.1.

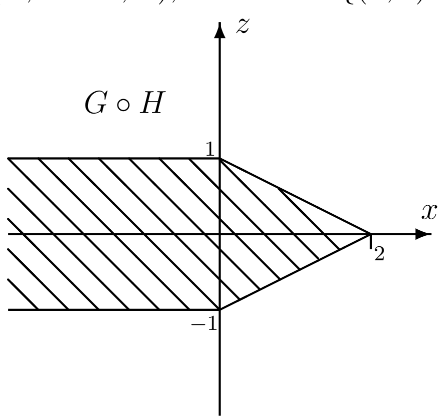
a) $\alpha^{-1} = (\mathbb{R}, G^{-1}, \mathbb{R}), \quad G^{-1} = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leq 1\}.$



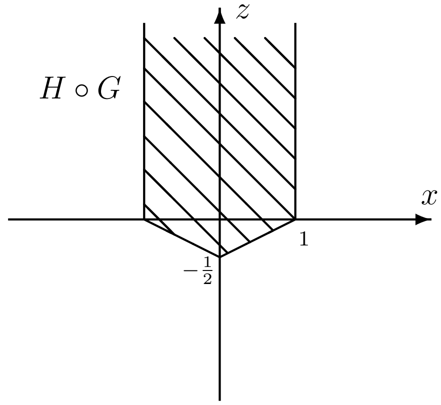
b) $\beta^{-1} = (\mathbb{R}, H^{-1}, \mathbb{R}), \quad H^{-1} = \{(x,y) \mid y \leq 2x\}.$



c) $\alpha \circ \beta = (\mathbb{R}, G \circ H, \mathbb{R}), \quad G \circ H = \{(x,z) \mid |z| \leq 1 \text{ şi } x \leq 2 - 2|z|\}.$

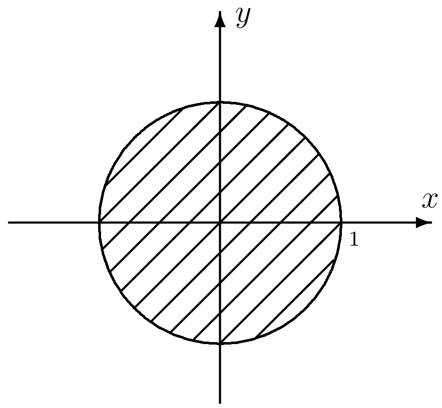


d) $\beta \circ \alpha = (\mathbb{R}, H \circ G, \mathbb{R}), \quad H \circ G = \{(x, z) \ | \ |x| \leq 1 \ \text{şi} \ 2z \geq |x| - 1\}.$

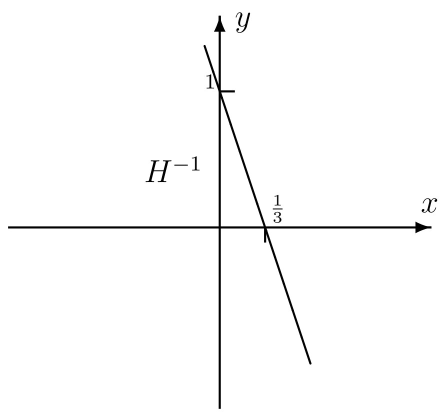


§3 1.2.

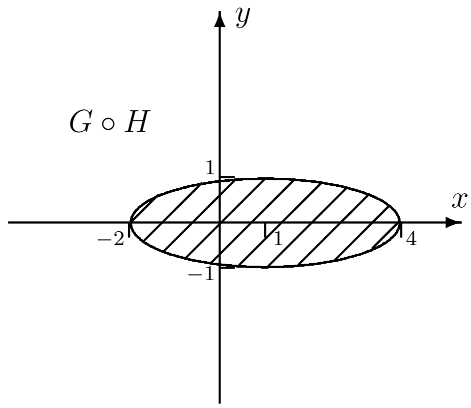
a) $\alpha^{-1} = (\mathbb{R}, G^{-1}, \mathbb{R}), \quad G^{-1} = \{(x, y) \ | \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$



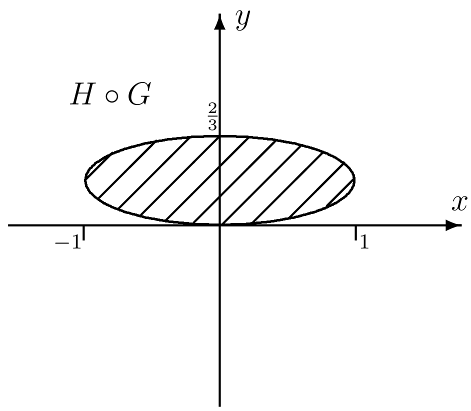
b) $\beta^{-1} = (\mathbb{R}, H^{-1}, \mathbb{R}), \quad H^{-1} = \{(x, y) \ | \ 3x + y = 1\}.$



c) $\alpha \circ \beta = (\mathbb{R}, G \circ H, \mathbb{R}), \quad G \circ H = \{(x, z) \ | \ \frac{(x-1)^2}{3^2} + z^2 \leq 1\}.$



d) $\beta \circ \alpha = (\mathbb{R}, H \circ G, \mathbb{R}), \quad H \circ G = \{(x,z) \mid x^2 + (3z-1)^2 \leq 1\}.$



§3 2.1. a) $[0;+\infty)$; b) $\varnothing$.

§3 2.2. a) $[-1;1]$; b) $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$.

§4 1.1. a) da, b) da, c) nu, d) nu, e) nu.

§4 1.2. a) da, b) nu, c) da, d) da, e) nu.

§4 1.3. a) da, b) nu, c) nu, d) da, e) nu.

§4 1.4. a) da, b) da, c) nu, d) da, e) nu.

§4 2.1.

a) $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Z}$;

b) $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad xy - x - y + 1 \geq 0$;

c) $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y$;

d) $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x \leq y$;

e) $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in \{(1,2),(2,3)\}$.

§4 2.2.

a) $(a,b)\rho(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a - c = 2(b-d)$;

b) $(a,b)\rho(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad (a-c)^2 + (b-d)^2 \leq 1$;

c) $(a,b)\rho(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a-c\in\mathbb{N};$

d) $(a,b)\rho(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a\geq 1 \ \wedge \ c\geq 1;$

e) $(a,b)\rho(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a=d+1.$

§4 3. a) da, b) da, c) da, d) da.

§4 4. a) da, b) nu, c) da, d) da.

§4 5. a) da, b) nu, c) nu, d) da.

§5 1.1. da.

§5 1.2. nu.

§5 1.3. da.

§5 1.4. da.

§5 1.5. da.

§5 1.6. da.

§5 2.1. $\{(n,n+1] \mid n\in\mathbb{Z}\}.$

§5 2.2. $\{(-\infty,0),\ \{0\},\ (0,+\infty)\}.$

§5 2.3. $\{\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid (a=c\wedge b\leq c)\vee(a\leq c\wedge b=c)\} \mid c\in\mathbb{R}\}.$

§5 2.4. $\{\{0,2,4,6,...\},\{1,5,9,13,...\},\{3,7,11,15,...\}\}.$

§5 3. $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad x\in X \ \wedge \ y\in X.$

§5 4. $x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad x=y.$

§5 5. a) da, b) da, c) nu, d) nu, e) da.

§6 2.1. c. §6 2.2. c. §6 2.3. $\aleph_0$. §6 2.4. c.

§6 2.5. c. §6 2.6. $\aleph_0$.

§6 3.1. c. §6 3.2. c. §6 3.3. c. §6 3.4. c. §6 3.5. c. §6 3.6. c.

§6 3.7. c. §6 3.8. c. §6 3.9. $\aleph_0$. §6 3.10. c. §6 3.11. c. §6 3.12. c.

§6 8. nu.

§6 10.1. $\aleph_0$. §6 10.2. $\aleph_0$. §6 10.3. $\aleph_0$. §6 10.4. $\aleph_0$.

§6 10.5. $\aleph_0$. §6 10.6. $\aleph_0$. §6 10.7. c. §6 10.8. c.

§6 10.9. $\aleph_0$. §6 10.10. $\aleph_0$. §6 10.11. $\aleph_0$. §6 10.12. c.

§6 10.13. c. §6 10.14. c. §6 10.15. c. §6 10.16. c.

§7 1.1. da. §7 1.2. nu. §7 1.3. nu. §7 1.4. da. §7 1.5. da.

§7 1.6. da. §7 1.7. da.

§7 2. a) da, b) da, c) nu, d) nu, e) da.

§7 3.1. a) $\varnothing$, b) 1, c) 4,5,3, d) 5,2,3.

§7 3.2. a) $\varnothing$, b) a, c) c,h, d) a.

§7 4. 100!

§7 5.1. da. §7 5.2. nu. §7 5.3. nu. §7 5.4. nu.

CUPRINSUL