Уравнения и неравенства второго порядка

Уравнения второго порядка

Уравнение вида
$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$
где $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, x - неизвестное, называется уравнением второго порядка (квадратным уравнением).

Числа a, b и c из (1) называются коэффициентами квадратного уравнения, а число $\Delta = b^2 - 4ac$ - дискриминантом квадратного уравнения.

Пример 1. Следующие уравнения являются квадратными уравнениями

$a)$ $6x^2 + 5x + 1 = 0,$ здесь $a = 6,\ b = 5,\ c = 1$ и $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1;$

$b)$ $9x^2 - 12x + 4 = 0,$ здесь $a = 9,\ b = -12,\ c = 4$ и $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0;$

$c)$ $x^2 - x - 2 = 0,$ здесь $a = 1,\ b = -1,\ c = -2$ и $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9;$

$d)$ $-\dfrac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}x - 4 = 0,$ здесь $a = -\dfrac{1}{2},\ b = \sqrt{3},\ c = -4$ и $\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)(-4) = -5.$

Уравнения второго порядка можно решать используя следующее утверждение

Утверждение 1. Если

a) дискриминант уравнения (1) положителен, то уравнение (1) имеет два различных действительных корня
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \tag{2}$$

b) дискриминант уравнения (1) равен нулю, то уравнение (1) имеет два равных корня (один корень двойной кратности)
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}; \tag{3}$$

c) дискриминант уравнения (1) отрицателен, то уравнение (1) не имеет действительных корней.

Таким образом (см. пример 1),

1. уравнение a) имеет два различных корня $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $x_2 = -\dfrac{1}{3}$;
2. уравнение b) имеет два равных корня $x_1 = x_2 = \dfrac{2}{3}$;

3. уравнение c) имеет два различных корня $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$;

4. уравнение d) не имеет действительных решений.

Уравнение второго порядка с $a = 1$ называется приведенным квадратным уравнением и обычно обозначается

$$x^2 + px + q = 0. \tag{4}$$

Для приведенных квадратных уравнений формулы определения корней (2) и (3) принимают вид

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad (\Delta > 0) \tag{5}$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}, \quad (\Delta = 0). \tag{6}$$

Уравнения вида

$$ax^2 + bx = 0, \tag{7}$$

$$ax^2 + c = 0. \tag{8}$$

называются неполными квадратными уравнениями. Уравнения (7), (8) могут быть решены с помощью утверждения 1, или иначе, более просто:

$$ax^2 + bx = 0 \;\Leftrightarrow\; x(ax+b) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x_1 = 0; \\ x_2 = -\frac{b}{a}. \end{array}\right.$$

$$ax^2 + c = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = -\frac{c}{a} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}, \\ ac \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \emptyset, \\ ac > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 2. Решить уравнения

$$a)\ 2x^2 - 7x = 0; \qquad b)\ 9x^2 - 25 = 0; \qquad c)\ \sqrt{2}x^2 + 3 = 0.$$

Решение. a) $2x^2 - 7x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(2x-7) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = \dfrac{7}{2}; \end{array}\right.$

b) $9x^2 - 25 = 0 \;\Leftrightarrow\; 9x^2 = 25 \;\Leftrightarrow\; x^2 = \dfrac{25}{9} \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \pm\dfrac{5}{3}$;

c) $\sqrt{2}x^2 + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, откуда следует что уравнение не имеет действительных корней (левая часть уравнения - неотрицательна, а правая - отрицательное число).

В дальнейшем рассмотрим несколько типов уравнений которые сводятся к уравнениям второго порядка.

Биквадратные уравнения

Уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \tag{9}$$

где $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, x - неизвестное, называется биквадратным уравнением. Подстановкой $x^2 = t$ (тогда $x^4 = t^2$) биквадратное уравнение сводится к уравнению второго порядка.

Пример 3. Решить уравнения

$$a)\ x^4 - 29x^2 + 100 = 0; \qquad b)\ x^4 + x^2 - 6 = 0; \qquad c)\ 2x^4 - 3x^2 + 4 = 0.$$

Решение. а) Обозначив $x^2 = t$, (тогда $x^4 = t^2$) получим квадратное уравнение относительно t

$$t^2 - 29t + 100 = 0$$

решения которого $t_1 = 4$ и $t_2 = 25$. Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 4, \\ x^2 = 25, \end{array}\right.$$

откуда $x = \pm 2$ и $x = \pm 5$.

b) Аналогично предыдущему примеру, получим квадратное уравнение $t^2 + t - 6 = 0$, решения которого $t = -3$ и $t = 2$. Поскольку $t = x^2 \geq 0$, остается $t = 2$ или $x^2 = 2$, откуда $x = \pm\sqrt{2}$.

c) Положив $x^2 = t$, получим квадратное уравнение $2t^2 - 3t + 4 = 0$, которое не имеет действительных корней. Следовательно и исходное уравнение не имеет действительных корней.

Симметричные уравнения четвертого порядка

Уравнения вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \tag{10}$$

где $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ называются симметричными уравнениями четвертого порядка.

Посредством подстановки $x + \dfrac{1}{x} = t$, симметричные уравнения четвертого порядка сводятся к уравнениям второго порядка. Действительно, так как $x = 0$ не является корнем уравнения (10) ($a \neq 0$), разделив на x^2 обе части уравнения, получим равносильное уравнение

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

или

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Обозначив $x + \dfrac{1}{x} = t$, тогда $|t| \geq 2$ и поскольку $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$, уравнение примет вид

$$a(t^2 - 2) + bt + c = 0,$$

решение последнего уравнения не представляет трудностей.

Замечание. Уравнение $ax^4 \mp bx^3 \pm cx^2 \pm bx + a = 0$ сводится к уравнению второго порядка используя подстановку $t = x - \dfrac{1}{x}$.

Пример 4. Решить уравнения

$$a)\ x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0,$$
$$b)\ 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Решение. а) Данное уравнение есть уравнение вида (10). Поскольку $x = 0$ не является корнем, разделив обе части уравнения на $x^2 \neq 0$ и удобно групируя, получим равносильное уравнение

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0.$$

Сделаем подстановку $t = x + \dfrac{1}{x},\ |t| \geq 2$, тогда $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$ и уравнение примет вид

$$t^2 - 2 + 5t + 2 = 0$$

или $t^2 + 5t = 0$, решения которого $t_1 = -5$, $t_2 = 0$ (не удовлетворяет условию $|t| \geq 2$). Следовательно,

$$x + \frac{1}{x} = -5,$$

откуда получаем квадратное уравнение $x^2 + 5x + 1 = 0$, решения которого $x_1 = \dfrac{-5 - \sqrt{21}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{-5 + \sqrt{21}}{2}$.

b) Аналогично предыдущему примеру получим уравнение

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0.$$

Положим $t = x - \dfrac{1}{x}$, тогда $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2 = t^2 + 2$ и получим квадратное уравнение

$$2(t^2 + 2) + 3t - 4 = 0 \ \text{ или } \ 2t^2 + 3t = 0,$$

решения которого $t_1 = 0$ и $t_2 = -\dfrac{3}{2}$. Следовательно

$$\left[\begin{array}{l} x - \dfrac{1}{x} = 0, \\ x - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Из первого уравнения совокупности получим $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, а из второго $x_3 = -2$ и $x_4 = \dfrac{1}{2}$.

Возвратные уравнения

Уравнение

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \tag{11}$$

где $\{a, b, c, d\} \subset \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $\dfrac{e}{a} = \left(\dfrac{d}{b}\right)^2$ называется возвратным уравнением четвертого порядка.

Уравнения (11) сводятся к уравнениям второго порядка посредством подстоновки $t = x + \dfrac{d}{bx}$.

Пример 5. Решить уравнение

$$x^4 + x^3 - 6x^2 - 2x + 4 = 0.$$

Решение. Заметим что $\left(\dfrac{4}{1}\right) = \left(\dfrac{-2}{1}\right)^2$ и следовательно данное уравнение есть возвратное уравнение четвертого порядка.

Так как $x = 0$ не является решением уравнения, разделим на x^2 (не теряя при этом решений) получим равносильное уравнение

$$x^2 + \frac{4}{x^2} + x - \frac{2}{x} - 6 = 0.$$

Обозначим $t = x - \dfrac{2}{x}$, тогда $t^2 = x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 4$, $x^2 + \dfrac{4}{x^2} = t^2 + 4$ и уравнение примет вид

$$t^2 + 4 + t - 6 = 0 \quad \text{или} \quad t^2 + t - 2 = 0$$

решения которого $t_1 = -2$ и $t_2 = 1$. Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} x - \dfrac{2}{x} = -2, \\ x - \dfrac{2}{x} = 1, \end{array}\right.$$

или, $(x \neq 0)$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 2 = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0, \end{array}\right.$$

откуда получим решения $x = -1 \pm \sqrt{3}$, $x = -1$ и $x = 2$.

Уравнения вида

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c \tag{12}$$

используя подстановку $t = x + \dfrac{a+b}{2}$ сводятся к биквадратному уравнению относительно t.

Пример 6. Решить уравнение

$$(x+3)^4 + (x-1)^4 = 82.$$

Решение. Сделаем подстановку $t = x + \dfrac{3+(-1)}{2} = x+1$ и получим следующее уравнение относительно t:

$$(t+2)^4 + (t-2)^4 = 82$$

или

$$t^4 + 8t^3 + 24t^2 + 32t + 16 + t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16 - 82 = 0$$

откуда получим биквадратное уравнение

$$t^4 + 24t^2 - 25 = 0$$

решение которого $t^2 = 1$, откуда $t = \pm 1$. Следовательно $x + 1 = \pm 1$ и корни исходного уравнения имеют вид $x = -2$ и $x = 0$.

Уравнения вида

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m \tag{13}$$

где $a + b = c + d$ сводятся к уравнениям второго порядка используя условие $a + b = c + d$. Действительно,

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x^2 + (a+b)x + ab\\ (x+c)(x+d) &= x^2 + (c+d)x + cd = x^2 + (a+b)x + cd\end{aligned}$$

и обозначив $x^2 + (a+b)x = t$ (или $x^2 + (a+b)x + ab = t$) получим квадратное уравнение $(t+ab)(t+cd) = m$ (соответственно, $t(t+cd-ab) = m$).

Пример 7. Решить уравнение

$$(x-2)(x+1)(x+4)(x+7) = 19.$$

Решение. Заметим, что $-2 + 7 = 1 + 4$ и удобно группируя, получим

$$[(x-2)(x+7)] \cdot [(x+1)(x+4)] = 19$$

или

$$[x^2 + 5x - 14][x^2 + 5x + 4] = 19.$$

Обозначим $t = x^2 + 5x - 14$, тогда $x^2 + 5x + 4 = t + 18$ и уравнение примет вид

$$t(t+18) = 19 \quad \text{или} \quad t^2 + 18t - 19 = 0$$

откуда $t = -19$ и $t = 1$. Таким образом

$$\left[\begin{aligned} &x^2 + 5x - 14 = -19,\\ &x^2 + 5x - 14 = 1,\end{aligned}\right.$$

откуда $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$ и $x_{3,4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{85}}{2}$.

Рациональные уравнения

Пример 8. Решить уравнения

$$a)\ \frac{3x+4}{5x-4}-\frac{2x-1}{x+3}=0;$$

$$b)\ \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{x-2}+1=0;$$

$$c)\ \frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-3}=0;$$

$$d)\ \frac{x+1}{x-1}+\frac{x+5}{x-5}=\frac{x+3}{x-3}+\frac{x+4}{x-4}.$$

Решение. а) *ОДЗ* уравнения есть множество $\mathbf{R}\setminus\left\{-3;\frac{4}{5}\right\}$. На *ОДЗ* уравнение равносильно следующему

$$(3x+4)(x+3)-(2x-1)(5x-4)=0$$

откуда легко получить квадратное уравнение

$$7x^2-26x-8=0.$$

Решив его, найдем $x_1=-\frac{2}{7}$ и $x_2=4$. Оба корня принадлежат *ОДЗ*.

b) *ОДЗ* уравнения есть множество $\mathbf{R}\setminus\{2;3\}$. Приводя к общему знаменателю получим

$$x-1+(x-2)(x-3)+x-3=0$$

или

$$x^2-3x+2=0.$$

Корни последнего уравнения $x_1=1$ и $x_2=2$. Учитывая *ОДЗ* получим единственное решение исходного уравнения $x=1$.

c) *ОДЗ* уравнения есть множество $\mathbf{R}\setminus\{3;4;5;6\}$. Имеем

$$\left(\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-3}\right)+\left(\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}\right)=0$$

или

$$\frac{2x-9}{(x-6)(x-3)}+\frac{2x-9}{(x-4)(x-5)}=0$$

откуда

$$(2x-9)(x-4)(x-5)+(2x-9)(x-6)(x-3)=0$$

или

$$(2x-9)[(x-4)(x-5)+(x-6)(x-3)]=0,$$

откуда следует совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l}2x-9=0,\\ x^2-9x+19=0\end{array}\right.$$

и решения $x = \dfrac{9}{2}$, $x = \dfrac{9 \pm \sqrt{5}}{2}$.

d) *ОДЗ* уравнения есть множество $\mathbf{R} \setminus \{1; 3; 4; 5\}$. Выделим целую часть каждой дроби.

$$\frac{x-1+2}{x-1} + \frac{x-5+10}{x-5} = \frac{x-3+6}{x-3} + \frac{x-4+8}{x-4}$$

или

$$1 + \frac{2}{x-1} + 1 + \frac{10}{x-5} = 1 + \frac{6}{x-3} + 1 + \frac{8}{x-4},$$

откуда

$$\frac{1}{x-1} + \frac{5}{x-5} = \frac{3}{x-3} + \frac{4}{x-4}$$

или

$$\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-3} = \frac{4}{x-4} - \frac{5}{x-5}.$$

Приведя к общему знаменателю, получим

$$\frac{-2x}{(x-1)(x-3)} = \frac{-x}{(x-4)(x-5)}$$

или

$$2x(x-4)(x-5) - x(x-1)(x-3) = 0,$$

откуда следует следующая совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^2 - 14x + 37 = 0, \end{array}\right.$$

и решения $x_1 = 0$, $x_{2,3} = 7 \pm 2\sqrt{3}$ (все решения принадлежат *ОДЗ*).

Уравнения вида

$$\frac{px}{ax^2 + bx + c} + \frac{qx}{ax^2 + dx + c} = r, \quad (r \neq 0). \tag{14}$$

сводятся к уравнениям второго порядка, используя подстановку $t = ax + \dfrac{c}{x}$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6.$$

Решение. *ОДЗ* уравнения есть множество $\mathbf{R} \setminus \left\{1; \dfrac{3}{2}\right\}$. Поскольку $x = 0$ не является решением данного уравнения, перепишем уравнение в виде

$$\frac{2}{2x - 5 + \dfrac{3}{x}} + \frac{13}{2x + 1 + \dfrac{3}{x}} = 6$$

(разделяем числитель и знаменатель каждой дроби на x).

Обозначим $t = 2x + \dfrac{3}{x}$ и уравнение примет вид

$$\frac{2}{t-5} + \frac{13}{t+1} = 6$$

или $2(t+1) + 13(t-5) = 6(t-5)(t+1)$, откуда следует квадратное уравнение

$$6t^2 - 39t + 33 = 0 \quad \text{или} \quad 2t^2 - 13t + 11 = 0.$$

Решив это уравнение, получим $t_1 = 1$ и $t_2 = \dfrac{11}{2}$ (оба корня удовлетворяют условиям $t \neq 5$ и $t \neq -1$). Таким образом получаем совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 2x + \dfrac{3}{x} = 1, \\ 2x + \dfrac{3}{x} = \dfrac{11}{2}, \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2 - x + 3 = 0, \\ 4x^2 - 11x + 6 = 0 \end{array}\right.$$

откуда $x_1 = \dfrac{3}{4}$ и $x_2 = 2$.

Уравнения содержащие взаимно-обратные выражения

Уравнения вида

$$a \cdot \frac{f(x)}{g(x)} + b \cdot \frac{g(x)}{f(x)} + c = 0 \quad (ab \neq 0), \tag{15}$$

сводятся к уравнениям второго порядка используя подстановку $t = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Тогда $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{t}$ и уравнение (15) примет вид $at^2 + ct + b = 0$.

Пример 10. Решить уравнения

$$a)\ \frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5, \qquad b)\ 20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$$

Решение. а) *ОДЗ* уравнения есть множество $\mathbf{R} \backslash \left\{-\dfrac{1}{2}; 0\right\}$. Обозначим $t = \dfrac{2x+1}{x}$, тогда $\dfrac{4x}{2x+1} = 4 \cdot \dfrac{1}{t}$ и уравнение примет вид

$$t + \frac{4}{t} = 5$$

откуда следует квадратное уравнение $t^2 - 5t + 4 = 0$, решения которого $t_1 = 1$ и $t_2 = 4$. Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+1}{x} = 1, \\ \dfrac{2x+1}{x} = 4, \end{array}\right.$$

откуда $x = -1$ и $x = \dfrac{1}{2}$ (оба решения входят в *ОДЗ*).

b) *ОДЗ* уравнения есть множество $\mathbf{R}\setminus\{\pm 1\}$. Заметив что $x = \pm 2$ не являются решениями данного уравнения, умножим обе части уравнения на выражение $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$ и получим равносильное уравнение

$$20\frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)} - 5\frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x-2)} + 48 = 0.$$

Обозначив $t = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)}$, тогда уравнение примет вид

$$20t - \frac{5}{t} + 48 = 0 \text{ или } 20t^2 + 48t - 5 = 0$$

решения которого $t_1 = \dfrac{1}{10}$ и $t_2 = -\frac{5}{2}$. Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{10}, \\ \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = -\dfrac{5}{2}, \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 11x + 6 = 0, \\ 7x^2 + 9x + 14 = 0, \end{array}\right.$$

откуда получаем корни исходного $x_1 = 3,\ x_2 = \dfrac{2}{3}$ (оба корня входят в *ОДЗ*).

В некоторых случаях удобно выделить полный квадрат.

Пример 11. Решить уравнения

$$a)\ x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0;$$

$$b)\ x^2 + \left(\frac{x}{2x-1}\right)^2 = 2.$$

Решение. a) Выделим полный квадрат

$$x^4 - 2x^2 \cdot x + x^2 - x^2 - x^2 + 2x + 1 = 0,$$
$$(x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x) + 1 = 0.$$

Обозначим $t = x^2 - x$ и получим квадратное уравнение

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

откуда $t = 1$ или $x^2 - x - 1 = 0$, решения которого $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) *ОДЗ* данного уравнения есть множество $\mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. Прибавив к обеим частям уравнения выражение

$$2x \cdot \frac{x}{2x-1}$$

получим

$$x^2 + 2x\frac{x}{2x-1} + \left(\frac{x}{2x-1}\right)^2 = 2 + 2x\frac{x}{2x-1}$$

или, выделяя в любой части полный квадрат

$$\left(x+\frac{x}{2x-1}\right)^2=2+2\frac{2x^2}{2x-1}$$

откуда следует уравнение

$$\left(\frac{2x^2}{2x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{2x-1}-2=0.$$

Сделаем подстановку $t=\dfrac{2x^2}{2x-1}$ и получим уравнение

$$t^2-t-2=0.$$

Решая его получим $t=-1$ и $t=2$ и следующую совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{2x^2}{2x-1}=-1,\\[2mm] \dfrac{2x^2}{2x-1}=2,\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l}2x^2+2x-1=0,\\ x^2-2x+1=0,\end{array}\right.$$

откуда $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ и $x_3=1$.

Неравенства второй степени

Неравенства вида

$$ax^2+bx+c>0, \tag{16}$$

$$ax^2+bx+c\geq 0, \tag{17}$$

$$ax^2+bx+c<0, \tag{18}$$

$$ax^2+bx+c\leq 0, \tag{19}$$

где $a,b,c\in\mathbf{R},\ a\neq 0$, называются неравенствами второй степени (квадратными неравенствами).

Квадратные неравенства решаются используя следующие утверждения.

Утверждение 2. Если $a>0$ и дискриминант квадратного трехчлена ax^2+bx+c положителен, то

1. неравенство (16) имеет решения $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$;
2. неравенство (17) имеет решения $x\in(\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$;
3. неравенство (18) имеет решения $x\in(x_1,x_2)$;
4. неравенство (19) имеет решения $x\in[x_1,x_2]$

где x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ есть корни трехчлена ax^2+bx+c.

Утверждение 3. Если $a>0$ и дискриминант квадратного трехчлена ax^2+bx+c равен нулю, то

1. неравенство (16) имеет решения $x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1\}$;
2. неравенство (17) имеет решения $x \in \mathbf{R}$;
3. неравенство (18) не имеет решений;
4. неравенство (19) имеет единственное решение: $x = x_1$,

где x_1 есть двойной корень трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Утверждение 4. Если $a > 0$ и дискримининант трехчлена $ax^2 + bx + c$ отрицателен, то

1. неравенства (16) и (17) имеют решения $x \in \mathbf{R}$;
2. неравенства (18) и (19) не имеют решений.

Если $a < 0$, умножая неравенства (16)-(19) на (-1) (при этом знак неравенства меняется на противоположный) получим неравенства в котором $a > 0$ и применяем утверждения 2-4.

Пример 12. Решить неравенства

$$\begin{array}{ll} a)\ x^2 - x - 90 > 0; & d)\ x^2 - x + 2 > 0; \\ b)\ 4x^2 - 12x + 9 \le 0; & e)\ -6x^2 + 5x - 1 \le 0; \\ c)\ x^2 - 6x < 0; & f)\ 4x^2 - x + 5 \le 0. \end{array}$$

Решение. a) Корни трехчлена $x^2 - x - 90$ есть $x_1 = -9$ и $x_2 = 10$, $a = 1 > 0$ и, следовательно, множество решений неравенста $x^2 - x - 90 > 0$ есть $x \in (-\infty; -9) \cup (10; +\infty)$.

b) Дискриминант трехчлена $4x^2 - 12x + 9$ равен нулю, $a = 4 > 0$ и следовательно, единственное решение неравенства $4x^2 - 12x + 9 \le 0$ есть $x = \dfrac{3}{2}$.

c) Корнями трехчлена $x^2 - 6x$ являются $x_1 = 0$ и $x_2 = 6$, $a = 1 > 0$, следовательно $x \in (0; 6)$ есть решения неравенства $x^2 - 6x < 0$.

d) Дискриминант трехчлена $x^2 - x + 2$ отрицателен, $a = 1 > 0$, и следовательно, любое действительное число удовлетворяет неравенство $x^2 - x + 2 > 0$.

e) Умножим обе части неравенства на -1 и получим неравенство $6x^2 - 5x + 1 \ge 0$. Используя утверждение 2, получим $x \in (-\infty; \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$.

f) Неравенство не имеет решений.

При решении неравенств степени выше двух, можно использовать те же приемы, что и в случае уравнений (в некоторых случаях дополнительно используется и метод интервалов).

Пример 13. Решить неравенства

$$
\begin{aligned}
&a)\ 6x^4+5x^3-38x^2+5x+6\le 0;\\
&b)\ x(x-2)(x-4)(x-6)\ge 9;\\
&c)\ x^4-4x^3+8x+3<0;\\
&d)\ \frac{x-2}{x-3}-\frac{2}{x-1}-\frac{8}{x^2-4x+3}<0;\\
&e)\ 50x^4-105x^3+74x^2-21x+2\ge 0;\\
&f)\ \frac{2x}{x^2-4x+7}+\frac{3x}{2x^2-10x+14}>1;\\
&g)\ (x+5)^4+(x+3)^4<272.
\end{aligned}
$$

Решение. а) Решив уравнение (см. (10))

$$6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$$

находим нули левой части неравенства

$$6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0 \;\Leftrightarrow\; 6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 6\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 6t^2+5t-50=0,\\ t=x+\dfrac{1}{x}, \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t_1=-\dfrac{10}{3},\\ t_2=\dfrac{5}{2}, \end{array}\right.\\ t=x+\dfrac{1}{x}, \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{10}{3},\\ x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} 3x^2+10x+3=0,\\ 2x^2-5x+2=0, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x_1=-3,\\ x_2=-\dfrac{1}{3},\\ x_3=\dfrac{1}{2},\\ x_4=2. \end{array}\right.$$

Следовательно,

$$6x^4+5x^3-38x^2+5x+6\le 0 \;\Leftrightarrow\; 6(x+3)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\le 0$$

откуда, используя метод интервалов, находим множество решений исходного неравенства $x\in\left[-3;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};2\right]$.

b) Используя метод решения уравнений вида (13) получим

$$x(x-2)(x-4)(x-6) \geq 9 \;\Leftrightarrow\; x(x-6)(x-2)(x-4) - 9 \geq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (x^2-6x)(x^2-6x+8) - 9 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} t(t+8) - 9 \geq 0, \\ t = x^2 - 6x, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} t^2 + 8t - 9 \geq 0, \\ t = x^2 - 6x, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} t \leq -9, \\ t \geq 1 \end{array}\right. \\ t = x^2 - 6x, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x \leq -9, \\ x^2 - 6x \geq 1, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 9 \leq 0, \\ x^2 - 6x - 1 \geq 0, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x \in (-\infty; 3 - \sqrt{10}] \cup [3 + \sqrt{10}; +\infty), \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in (-\infty; 3 - \sqrt{10}] \cup \{3\} \cup [3 + \sqrt{10}; +\infty).$$

c) Выделяя полный квадрат, получим

$$x^4 - 4x^3 + 8x + 3 < 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x^2\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x + 4x^2 - 4x^2 + 8x + 3 < 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (x^2 - 2x) - 4(x^2 - 2x) + 3 < 0 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} t^2 - 4t + 3 < 0, \\ t = x^2 - 2x, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} 1 < t < 3, \\ t = x^2 - 2x, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x^2 - 2x < 3, \\ x^2 - 2x > 1, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 < 0, \\ x^2 - 2x - 1 > 0, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} -1 < x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} x > 1 + \sqrt{2}, \\ x < 1 - \sqrt{2}, \end{array}\right. \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in (-1; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; 3).$$

d) Используя метод интервалов, получим

$$\frac{x-2}{x-3} - \frac{2}{x-1} - \frac{8}{x^2 - 4x + 3} < 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{(x-2)(x-1) - 2(x-3) - 8}{(x-3)(x-1)} < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2 - 5x}{(x-3)(x-1)} < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x(x-5)}{(x-3)(x-1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow\; x \in (0; 1) \cup (3; 5).$$

e) Решая уравнение (см. (11))

$$50x^4 - 105x^3 + 24x^2 - 21x + 2 = 0$$

находим нули левой части неравенства (заметим, что $x = 0$ есть решение данного неравенства)

$$50x^4-105x^3+74x^2-21x+2=0 \Leftrightarrow 2\left(25x^2+\frac{1}{x^2}\right)-21\left(5x+\frac{1}{x}\right)+74=0 \Leftrightarrow$$

$$2\left[\left(5x+\frac{1}{x}\right)^2-10\right]-21\left(5x+\frac{1}{x}\right)+74=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2-21x+54=0, \\ t=5x+\dfrac{1}{x}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=6, \\ t=\dfrac{9}{2}, \end{array}\right. \\ t=5x+\dfrac{1}{x}, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x+\dfrac{1}{x}=6, \\ 5x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{9}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x^2-6x+1=0, \\ 10x^2-9x+2=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{5}, \\ x=1, \\ x=\dfrac{1}{2}, \\ x=\dfrac{2}{5}. \end{array}\right.$$

Следовательно

$$50x^4-105x^3+74x^2-21x+2\geq 0 \Leftrightarrow 50\left(x-\frac{1}{5}\right)(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{5}\right)\geq 0.$$

Используя метод интервалов, получим $x\in(-\infty;\frac{1}{5}]\cup[\frac{2}{5};\frac{1}{2}]\cup[1;+\infty)$.

f) Так как $x=0$ не является решением неравенства ($0>1$) исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{2}{x-4+\dfrac{7}{x}}+\frac{3}{2x-10+\dfrac{14}{x}}>1.$$

Обозначив $t=x+\dfrac{7}{x}$, тогда $2x+\dfrac{14}{x}=2\left(x+\dfrac{7}{x}\right)=2t$ неравенство примет вид

$$\frac{2}{t-4}+\frac{3}{2t-10}>1.$$

Используя метод интервалов, получим

$$\frac{2(2t-10)+3(t-4)-(2t-10)(t-4)}{(t-4)(2t-10)}>0 \Leftrightarrow \frac{2t^2-25t+72}{(t-2)(2t-10)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(t-\dfrac{9}{2}\right)(t-8)}{(t-4)(2t-10)}<0 \Leftrightarrow t\in(4;\frac{9}{2})\cup(5;8).$$

Следовательно

$$\left[\begin{array}{l} 4<x+\dfrac{7}{x}<\dfrac{9}{2}, \\ 5<x+\dfrac{7}{x}<8, \end{array}\right. \quad \text{откуда} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+7}{x}>0, \\ \dfrac{2x^2-9x+14}{x}<0, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+7}{x}>0, \\ \dfrac{x^2-8x+7}{x}<0, \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{или}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ x < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ 1 < x < 7, \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \emptyset, \\ x \in (1;7), \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (1;7).$$

g) Сделаем подстановку $t = x + \dfrac{5+3}{2}$, $t = x + 4$ (см. (12)), тогда неравенство примет вид

$$(t+1)^4 + (t-1)^4 < 272$$

или

$$t^4 + 6t^2 - 135 < 0$$

откуда

$$(t^2 - 9)(t^2 + 15) < 0 \quad \text{или} \quad |t| < 3.$$

Следовательно $|x+4| < 3$. Используя свойства модуля получим

$$|x+4| < 3 \Leftrightarrow -3 < x + 4 < 3 \Leftrightarrow -7 < x < -1.$$

Упражнения

I. Решить уравнения

1. $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24.$
2. $(1-x)(2-x)(x+3)(x+3) = 84.$
3. $(x+2)^4 + x^4 = 82.$
4. $(2x^2+5x-4)^2 - 5x^2(2x^2+5x-4) + 6x^4 = 0.$
5. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 = 6.$
6. $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3} + \dfrac{13x}{2x^2+x+3} = 6.$
7. $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{18}{x^2} = \dfrac{13}{5}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{x}\right).$
8. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}\right).$
9. $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 2 = 0.$
10. $x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 12x + 3 = 0.$
11. $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x+2}{x+3} + \dfrac{4}{(x-1)(x+3)} = 0.$

12. $\dfrac{3}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{1}{x(x-1)^2} + \dfrac{3}{x(x-3)}$.

13. $(x^2+x+1)(x^2+x+2) = 12$.

14. $\dfrac{24}{x^2-2x} = \dfrac{12}{x^2-x} + x^2 - x$.

15. $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

II. Решить неравенства

1. $x + \dfrac{6}{x} < 7$.
2. $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 \leq 0$.
3. $\dfrac{x^2+2x-63}{x^2-8x+7} > 7$.
4. $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{7}{x+2} < \dfrac{6}{x-1}$.
5. $\dfrac{3}{6x^2-x-12} + \dfrac{3}{3x+4} < \dfrac{25x-47}{10x-15}$.
6. $x^4 + x^3 - 12x^2 - 26x - 24 < 0$.
7. $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-6x+5} < 0$.
8. $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4) \geq 84$.
9. $(x-1)^4 + (x+1)^4 \geq 82$.
10. $\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2 + \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 \geq 2$.

Литература

1. P.Cojuhari. Ecuatii si inecuatii. Teorie si practica. Chisinau, Universitas, 1993.
2. P.Cojuhari, A.Corlat. Ecuatii si inecuatii algebrice. Mica biblioteca a elevului. Chisinau, Editura ASRM, 1995.
3. Ф.Яремчук, П.Руденко. Алгебра и элементарные функции. Киев, Наукова Думка, 1987.
4. Gh.Andrei si altii. Exercitii si probleme de algebra pentru concursuri si olimpiade scolare. Partea I, Constanta, 1990.