Иррациональные неравенства

Неравенство, содержащее неизвестные величины или некоторые функциии неизвестных величин под знаком радикала называется **иррациональным неравенством**.

При решении иррациональных неравенств, как правило, приходится возводить обе части неравенства в натуральную степень. Такого рода преобразования могут привести к неравенствам, которые не равносильны исходному, и посколько множество решений в большинстве случаев представляет бесконечное множество, невозможно провести проверку полученых решений подстановкой. Единственный способ, который гарантирует правильный ответ, состоит в применении исключительно равносильных преобразований неравенств. В связи с этим, приведем соответсвующие утверждения, которые часто используются при решении иррациональных неравенств (во всех утверждениях n - натуральное число).

A1. Неравенство

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$$

равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > [g(x)]^{2n}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Замечание. Из утверждения **A1** следует что неравенство

$$\sqrt[2n]{f(x)} > b,$$

при $b \geq 0$ равносильно неравенству $f(x) > [b]^{2n}$, а при $b < 0$ равносильно неравенству $f(x) \geq 0$.

A2. Неравенство

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$$

равносильно следующей системе неравенств

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < [g(x)]^{2n}. \end{cases}$$

Замечание. Из утверждения **A2** следует, что если правая часть неравенства есть число b $(g(x) = b)$, то

– $\sqrt[2n]{f(x)} < b \ \Leftrightarrow\ 0 \leq f(x) < [b]^{2n}$, если $b > 0$;

– неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} < b$ не имеет решений, если $b \leq 0$.

A3. Неравенство

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}$$

равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

A4. Неравенство

$$\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} > 1$$

равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > [g(x)]^{2n}, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

A5. Неравенство

$$\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} < 1$$

равносильно следующей совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < [g(x)]^{2n}. \end{cases} \end{array} \right.$$

A6. Неравенство

$$\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) \geq 0$$

равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D(g), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \end{array} \right.$$

где $D(g)$ означает область определения функции g.

A7. Неравенство

$$\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) \leq 0$$

равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D(g), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) \leq 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

A8. Неравенства

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \quad \text{и} \quad f(x) < [g(x)]^{2n+1}$$

равносильны.

A9. Неравенства

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \quad \text{и} \quad f(x) > [g(x)]^{2n+1}$$

равносильны.

Замечание. Если m нечетное число, то

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^m < [g(x)]^m,$$
$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^m > [g(x)]^m,$$

т.е. при возведении в нечетную степень знак неравенства не изменяется.

Расмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенства

$a)$ $\sqrt{x^2+3x-18} > 2x+3,$ $\qquad g)$ $\sqrt{x^2-x-2} > \sqrt{6+5x-x^2},$

$b)$ $\sqrt{x^2-x-90} \geq -1,$ $\qquad h)$ $\dfrac{\sqrt{2-x}}{1+x} > 1,$

$c)$ $\sqrt[4]{x^2-9x+16} > 2,$ $\qquad i)$ $\dfrac{\sqrt{x-3}}{3-|x-6|} < 1,$

$d)$ $\sqrt{x^2+4x-5} < 2x+1,$ $\qquad j)$ $(x-1)\sqrt{6+x-x^2} \leq 0,$

$e)$ $\sqrt{x^2-5x+4} < 2,$ $\qquad k)$ $\dfrac{9-x}{1-x}\sqrt{x^2-8x+7} \geq 0,$

$f)$ $\sqrt{x^2-x-2} \leq -2,$ $\qquad l)$ $\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} < x+1.$

Решение. а) Используя утверждение **A1** (в данном случае $f(x) = x^2+3x-18$, а $g(x) = 2x+3$) получим

$$\sqrt{x^2+3x-18} > 2x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2+3x-18 \geq 0, \\ 2x+3 < 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2+3x-18 > (2x+3)^2, \\ 2x+3 \geq 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty, -6], \\ x \in \emptyset, \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -6].$$

Действительно, поскольку

$$x^2+3x-18 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (x+6)(x-3) \geq 0,$$

решение первого неравенства есть множество $x \in (-\infty; -6] \cup [3; +\infty)$. Решения второго неравенства системы $x \in (\infty, -\frac{3}{2})$, следовательно, решение первой системы совокупности неравенств есть множество $x \in (-\infty, -6]$.

Первое неравенство второй системы совокупности не имеет решений

$$x^2+3x-18 > (2x+3)^2 \;\Leftrightarrow\; x^2+3x-18 > 4x^2+12x+9 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 3x^2+9x+27 < 0 \;\Leftrightarrow\; x^2+3x+9 < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \emptyset,$$

и, следовательно, вторая система совокупности не имеет решений.

Таким образом множество решений исходного неравенства есть $(-\infty, -6]$.

b) Заметим, что правая часть неравенства есть отрицательное число, а левая часть (как только существует - $x^2 - x - 90 \geq 0$) получает неотрицательные значения. Таким образом (см. замечание к утверждению **A1**) множество решений исходного неравенства находится решая неравенство

$$x^2 - x - 90 \geq 0,$$

или

$$(x+9)(x-10) \geq 0,$$

откуда $x \in (-\infty, -9] \cup [10, +\infty)$.

c) Возводим обе части неравенства в четвертую степень и получим равносильное неравенство (см. замечание к утверждению **A1**)

$$x^2 - 9x + 16 > 16,$$

или

$$x^2 - 9x > 0,$$

откуда $x \in (-\infty, 0) \cup (9, +\infty)$.

d) Используя утверждение **A2** (здесь $f(x) = x^2 + 4x - 5$ и $g(x) = 2x - 3$) получим

$$\sqrt{x^2+4x-5} < 2x+1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 \geq 0, \\ x^2+4x-5 \geq 0, \\ x^2+4x-5 < (2x+1)^2, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq -\dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -5, \\ x \geq 1, \end{array} \right. \\ 3x^2+6 > 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1, \\ x \in \mathbf{R}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \ x \geq 1.$$

e) Используя замечание к утверждению **A2**, получим

$$\sqrt{x^2-5x+4} < 2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2-5x+4 < 4, \\ x^2-5x+4 \geq 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2-5x < 0, \\ x^2-5x+4 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 5, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 1, \\ x \geq 4, \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (0;1] \cup [4;5).$$

f) Неравенство не имеет решений, поскольку левая часть неравенства в *ОДЗ* есть выражение, принимающие неотрицательные значения и, следовательно, не может быть меньше или равно отрицательного числа.

g) Используя утверждение **A3** (здесь $f(x) = x^2 - x - 2$ и $g(x) = 6 + 5x - x^2$) получим

$$\sqrt{x^2-x-2} > \sqrt{6+5x-x^2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2-x-2 > 6+5x-x^2, \\ 6+5x-x^2 \geq 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2-3x-4 > 0, \\ x^2-5x-6 \leq 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 4, \end{array} \right. \\ -1 \leq x \leq 6, \end{array} \right. \Leftrightarrow \ x \in (4, 6].$$

h) Согласно утверждению **A4**

$$\frac{\sqrt{2-x}}{x+1} > 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2-x > (x+1)^2, \\ x+1 > 0, \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2+3x-1 < 0, \\ x > -1, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2} < x < \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}, \\ x > -1, \end{cases} \;\Leftrightarrow\; -1 < x < \frac{\sqrt{13}-3}{2}.$$

i) Используя утверждение **A5** получим следующую совокупность систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3-|x-6| < 0, \\ x-3 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3-|x-6| > 0, \\ x-3 \geq 0, \\ x-3 < (3-|x-6|)^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решая первую систему, получим

$$\begin{cases} |x-6| > 3, \\ x \geq 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-6 > 3, \\ x-6 < -3, \end{array}\right. \\ x \geq 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 9, \\ x < 3, \end{array}\right. \\ x \geq 3, \end{cases} \Leftrightarrow\; x > 9.$$

Решая вторую систему совокупности, получим

$$\begin{cases} |x-6| < 3, \\ x \geq 3, \\ x-3 < 9-6|x-6|+x^2-12x+36, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x-6 < 3, \\ x \geq 3, \\ x^2-6|x-6|-x+48 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 9, \\ x^2-6|x-6|-x+48 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 < x \leq 6, \\ x^2+6(x-6)-x+48 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 6 < x < 9, \\ x^2-6(x-6)-x+48 > 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 < x \leq 6, \\ x^2+5x+12 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 6 < x < 9, \\ x^2-7x+84 > 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 < x \leq 6, \\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \\ \begin{cases} 6 < x < 9, \\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow\; 3 < x < 9.$$

т.е. решение исходного неравенства есть

$$x \in (3;9) \cup (9;+\infty).$$

j) Согласно утверждению **A7** получим:

$$(x-1)\sqrt{6+x-x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6+x-x^2 = 0, \\ x \in \mathbf{R}. \end{cases} \\ \begin{cases} 6+x-x^2 > 0, \\ x-1 \leq 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=3. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -2<x<3, \\ x \leq 1, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \ x \in [-2;1] \cup \{3\}.$$

k) Используя утверждение **A6** получим:

$$\frac{9-x}{1-x}\sqrt{x^2-8x+7} \geq 0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x^2-8x+7=0, \\ x \neq 1, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x^2-8x+7>0, \\ \dfrac{9-x}{1-x} \geq 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=7, \end{array}\right. \\ x \neq 1, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x<1, \\ x>7, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>9, \\ x<1, \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7, \\ \left[\begin{array}{l} x<1, \\ x>9, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \ x \in (-\infty, 1) \cup \{7\} \cup [9, +\infty).$$

l) Возведя обе части неравенства в куб получим равносильное неравенство (см. утверждение **A9**)

$$x^3+x^2+x+1 < x^3+3x^2+3x+1$$

или

$$2x^2+2x>0,$$

откуда $x<-1$ или $x>0$.

В дальнейшем рассмотрим применение метода подстановки.

Пример 2. Решить неравенства

a) $3\sqrt[6]{x+2}-\sqrt[3]{x+2} \geq 2,$ *d*) $5x-17\sqrt{x+5}+31<0,$

b) $\dfrac{1}{1-\sqrt{x+1}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}+1},$ *e*) $18\sqrt{2x-1}-9\sqrt[4]{(2x-1)(x-1)} \geq 2\sqrt{x-1},$

c) $\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}-2\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}<1,$ *f*) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1.$

Решение. a) Положив $\sqrt[6]{x+2}=t$ $(t \geq 0)$, и тем самым $\sqrt[3]{x+2}=t^2$, получим неравенство

$$3t-t^2 \geq 2,$$

или

$$t^2-3t+2 \leq 0,$$

откуда

$$1 \leq t \leq 2.$$

Следовательно, исходное неравенство равносильно двойному неравенству

$$1 \le \sqrt[6]{x+2} \le 2 \;\Leftrightarrow\; 1 \le x+2 \le 64 \;\Leftrightarrow\; -1 \le x \le 62.$$

b) Положив $\sqrt{x+1} = t$, $t \ge 0$ и используя метод интервалов получим

$$\frac{1}{1-t} \le \frac{1}{2t+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2t+1} \le 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{2t+1-(1-t)}{(1-t)(2t+1)} \le 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3t}{(1-t)(2t+1)} \le 0.$$

Поскольку $t \ge 0$ влечет $2t+1 \ge 1$, последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} t = 0, \\ 1 - t < 0, \end{cases}$$

откуда получим $t = 0$ и $t > 1$. Таким образом:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = 0, \\ \sqrt{x+1} > 1, \end{array}\right.$$

откуда $x = -1$ и $x > 0$. Следовательно, $x \in \{-1\} \cup (0, +\infty)$.

c) Заметим, что данное неравенство содержит взаимно обратные выражения. Положив $\sqrt{\dfrac{x}{x-2}} = t$, тогда $\sqrt{\dfrac{x-2}{x}} = \dfrac{1}{t}$, получим неравенство

$$t - 2\frac{1}{t} < 1.$$

Так как $t > 0$, последнее неравенство равносильно следующему

$$t^2 - t - 2 < 0,$$

откуда $-1 < t < 2$. Так как $t > 0$, получим $0 < t < 2$, или

$$0 < \sqrt{\frac{x}{x-2}} < 2.$$

Последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x-2} < 4, \\ \dfrac{x}{x-2} > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{8-3x}{x-2} < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > 2. \end{array}\right. \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{8}{3}, \\ x < 2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > 2, \end{array}\right. \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$.

d) Запишем неравенство (добавив и вычтя 25) следующим образом:

$$5(x+5) - 25 - 17\sqrt{x+5} + 31 < 0.$$

Обозначив $\sqrt{x+5} = t$, (тогда $x + 5 = t^2$) получим квадратное неравенство

$$5t^2 - 17t + 6 < 0,$$

откуда

$$\frac{2}{5} < t < 3,$$

или

$$\frac{2}{5} < \sqrt{x+5} < 3.$$

Поскольку все части двойного неравенства положительны, возведя в квадрат получим равносильное неравенство

$$\frac{4}{25} < x + 5 < 9,$$

откуда $x \in (-4\frac{21}{25}; 4)$.

e) *ОДЗ* неравенства есть $x \geq 1$. На *ОДЗ* неравенство равносильно следуещему

$$18 - 9\frac{\sqrt[4]{(2x-1)(x-1)}}{\sqrt{2x-1}} \geq \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}}$$

или

$$18 - 9\frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{2x-1}} - 2\left(\frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{2x-1}}\right)^2 \geq 0.$$

Положив $\dfrac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{2x-1}} = t$, получим квадратное неравенство

$$18 - 9t - 2t^2 \geq 0$$

решения которого $-6 \leq t \leq \dfrac{3}{2}$. Так как $t \geq 0$, исходное неравенство равносильно следующему

$$0 \leq \frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{2x-1}} \leq \frac{3}{2}.$$

Используя утверждения **A1** и **A2** получим

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x-1} \leq \dfrac{81}{16}, \\ x - 1 \geq 0, \\ 2x - 1 > 0, \end{cases}$$

откуда $x \geq 1$.

f) Положив $\sqrt{x-1} = t$, тем самым $x - 1 = t^2$ и $\sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{1 + (1-x)} = \sqrt[3]{1 - (x-1)} = \sqrt[3]{1-t^2}$, получим неравенство

$$\sqrt[3]{1-t^2} + t > 1,$$

или

$$\sqrt[3]{1-t^2} > 1-t.$$

Возводя в куб получим равносильное неравенство (см. утвеждение **A9**)

$$1-t^2 > (1-t)^3,$$

или

$$\begin{aligned}&(1-t)(1+t)-(1-t)^3 > 0,\\ &(1-t)(1+t-(1-t)^2) > 0,\\ &(1-t)(1+t-1+2t-t^2) > 0,\\ &(1-t)t(3-t) > 0.\end{aligned}$$

Поскольку $t \geq 0$, последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}(1-t)(3-t) > 0,\\ t \neq 0,\end{cases}$$

откуда следует совокупность

$$\left[\begin{array}{l} t > 3,\\ \begin{cases} t < 1,\\ t \neq 0,\end{cases}\end{array}\right.$$

или

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} > 3,\\ \begin{cases} \sqrt{x-1} < 1,\\ \sqrt{x-1} \neq 0,\end{cases}\end{array}\right.$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} x-1 > 9,\\ 0 < x-1 < 1,\end{array}\right.$$

или

$$\left[\begin{array}{l} x > 10,\\ 1 < x < 2,\end{array}\right.$$

то есть $x \in (1;2) \cup (10;+\infty)$.

Часто используется следующий способ решения иррациональных неравенств: с помощью преобразований сохраняющих равносильность, исходное неравенство сводится к неравенствам которые фигурируют в утверждениях **A1**-**A9**, после чего применяется соответствующее утверждение.

Пример 3. Решить неравенства

a) $\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+1} < \sqrt{2-x}$,

b) $\dfrac{\sqrt{1+x^3}+x-2}{x-1} \geq x+1$,

c) $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}} - \sqrt{1-\dfrac{1}{x}} > \dfrac{x-1}{x}$,

d) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} + 2\sqrt{(x-1)(x+6)} < 51-2x$,

e) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} \geq 4$.

Решение. а) Решив систему (условие существования радикалов второго порядка)

$$\begin{cases} x+4 \ge 0, \\ 2x+1 \ge 0, \\ 2-x \ge 0, \end{cases}$$

находим *ОДЗ* неравенства: $[-\frac{1}{2}; 2]$.

В *ОДЗ* неравенство равносильно следующему

$$\sqrt{x+4} < \sqrt{2-x} + \sqrt{2x+1}.$$

Поскольку обе части неравенства положительны в *ОДЗ*, возводя в квадрат, получим равносильное неравенство:

$$x+4 < 2-x+2\sqrt{2-x}\sqrt{2x+1}+2x+1,$$

или

$$1 < 2\sqrt{2-x}\sqrt{2x+1}.$$

Еще раз возводя в квадрат и учитывая *ОДЗ* получим

$$\begin{cases} 1 < 4(2-x)(2x+1), \\ -\dfrac{1}{2} \le x \le 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 8x^2-12x-7 < 0, \\ -\dfrac{1}{2} \le x \le 2, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{3-\sqrt{23}}{4} < x < \frac{3+\sqrt{23}}{4}.$$

b) Запишем неравенство следующим образом

$$\frac{\sqrt{1+x^3}+(x-2)}{x-1} - (x+1) \ge 0,$$

или

$$\frac{\sqrt{1+x^3}+(x-2)-(x^2-1)}{x-1} \ge 0,$$
$$\frac{\sqrt{1+x^3}-(1-x+x^2)}{x-1} \ge 0.$$

Так как $1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$ и $1-x+x^2 > 0$ для любого $x \in \mathbf{R}$, неравенство

$$\frac{\sqrt{(1+x)(1-x+x^2)}-(1-x+x^2)}{x-1} \ge 0$$

эквивалентно следующему

$$\frac{\sqrt{1-x+x^2}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x+x^2})}{x-1} \ge 0.$$

Разделив на $\sqrt{1-x+x^2}$ (это выражение положительно для любого $x \in \mathbf{R}$) получим неравенство

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x+x^2}}{x-1} \geq 0,$$

равносильное совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x+x^2} \geq 0, \\ x-1>0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x+x^2} \leq 0, \\ x-1<0, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

или, учитывая утверждение **A3**

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 1+x \geq 1-x+x^2, \\ 1-x+x^2 \geq 0, \\ x>1, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 1+x < 1-x+x^2, \\ 1+x \geq 0, \\ x<1, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

откуда следует

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x^2-2x \leq 0, \\ x \in \mathbf{R}, \\ x>1, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x^2-2x \geq 0, \\ x>-1, \\ x<1, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x \leq 2, \\ -1<x \leq 0. \end{array}\right.$$

Таким образом, множество решений исходного неравенства есть $x \in (-1; 0] \cup (1; 2]$.

c) *ОДЗ* данного неравенства $x \in [-1; 0) \cup [1; +\infty)$, определяется решая систему неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} x-\dfrac{1}{x} \geq 0, \\ 1-\dfrac{1}{x} \geq 0. \end{array}\right.$$

Запишем неравенство в виде

$$\sqrt{\frac{(x-1)}{x}(x+1)}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}-\sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}>0$$

или, используя следующее свойство радикалов четной степени: $\sqrt[2n]{AB} = \sqrt[2n]{|A|} \cdot \sqrt[2n]{|B|}$, $(AB \geq 0)$,

$$\sqrt{\left|\frac{x-1}{x}\right|}\left(\sqrt{|x+1|}-1-\sqrt{\left|\frac{x-1}{x}\right|}\right)>0.$$

Последнее неравенство, учитывая что в *ОДЗ* $x+1 \ge 0$ и $\dfrac{x-1}{x} \ge 0$ и, следовательно $|x+1| = x+1$, $\left|\dfrac{x-1}{x}\right| = \dfrac{x-1}{x}$, равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} > 1 + \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}, \\ \sqrt{\dfrac{x-1}{x}} \ne 0, \end{cases}$$

которая решается следующим образом

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} > 1 + \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}, \\ x \ne 1, \\ x \in [-1; 0) \cup [1; +\infty), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 1 + 2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} + \dfrac{x-1}{x}, \\ x \in [-1; 0) \cup (1; +\infty), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-x+1}{x} > 2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}, \\ x \in [-1; 0) \cup (1; +\infty), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-x+1}{x} - \dfrac{2\sqrt{(x-1)x}}{|x|} > 0 \\ x \in [-1; 0) \cup (1; +\infty), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x(x-1) \pm 2\sqrt{x(x-1)} + 1}{x} > 0, \\ x \in [-1; 0) \cup (1; +\infty), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(\sqrt{x(x-1)} \pm 1\right)^2}{x} > 0, \\ x \in [-1; 0) \cup (1; +\infty), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(x-1)} - 1 \ne 0, \\ x > 0, \\ x \in [-1; 0) \cup (1; +\infty), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \ne 1, \\ x \in (1; +\infty), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ x \in (1; +\infty), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right).$$

d) Пусть $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} = t$, тогда $x - 1 + 2\sqrt{(x-1)(x+6)} + x + 6 = t^2$, откуда $2\sqrt{(x+1)(x+6)} = t^2 - 2x - 5$ и неравенство принимает вид

$$t + t^2 - 5 < 51$$

или

$$t^2 + t - 56 < 0,$$

откуда $-8 < t < 7$. Так как $t > 0$ (сумма двух радикалов четной степени), остается $t < 7$ или $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} < 7$.

Последнее неравенство можно решить аналогично примеру 3a):

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} < 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 + 2\sqrt{x-1}\sqrt{x+6} + x + 6 < 49, \\ x - 1 \ge 0, \\ x + 6 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}\sqrt{x+6} < 22-x, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+6) < (22-x)^2, \\ 22-x > 0, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 10, \\ 1 \leq x < 22, \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 10,$$

или другим способом: заметим что для $x = 10$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} = 7,$$

следовательно, поскольку функции $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+6}$ является возрастающей, для $x \geq 10$ неравенства не имеет решений. Учитывая *ОДЗ*, запишем множество решений $x \in [1; 10)$.

e) Так как

$$x \pm 4\sqrt{x-4} = x - 4 \pm 4\sqrt{x-4} + 4 = \left(\sqrt{x-4} \pm 2\right)^2$$

неравенство равносильно следующему:

$$\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} \geq 4,$$

или, учитывая что $\sqrt{A^2} = |A|$,

$$|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2| \geq 4.$$

Так как $\sqrt{x-4} \geq 0$, то $\sqrt{x-4} + 2 \geq 2$ и, следовательно $|\sqrt{x-4}+2| = \sqrt{x-4} + 2$. Таким образом,

$$\sqrt{x-4} + 2 + |\sqrt{x-4}-2| \geq 4,$$

или

$$|\sqrt{x-4}-2| \geq 2 - \sqrt{x-4}.$$

Так как $|a| \geq -a$, для любого $a \in \mathbf{R}$, следует что множество решений исходного неравенства совпадает с *ОДЗ*, то есть $x \geq 4$.

Упражнения

Решить неравенства:

1. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1} < 1.$

2. $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}.$

3. $(x^2-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0.$

4. $\sqrt{\dfrac{1-2x}{x-2}} > -1.$

5. $\sqrt{3x-9} > \sqrt{6-x}.$

6. $\dfrac{x^2-13x+40}{\sqrt{19x-x^2-78}} \leq 0.$

7. $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$.

8. $\sqrt{2x-x^2} < 5-x$.

9. $\sqrt{11-5x} > x-1$.

10. $\sqrt{x^2+7x+12} > 6-x$.

11. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+2} \geq 0$.

12. $\sqrt{x-6}-\sqrt{10-x} \geq 1$.

13. $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$.

14. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} > \dfrac{1}{2-x}$.

15. $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0$.

16. $\dfrac{6x}{x-2} - \sqrt{\dfrac{12x}{x-2}} - 2\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}} > 0$.

17. $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 6 < 0$.

18. $\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} < 1$.

19. $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \dfrac{1}{x}$.

20. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$.