Метод математической индукции

Метод математической индукции является важным способом доказательства предложений (утверждений), зависящих от натурального аргумента.

Метод математической индукции состоит в следующем:

Предложение (утверждение) $P(n)$, зависящее от натурального числа n, справедливо для любого натурального n, если:

1. $P(1)$ является истинным предложением (утверждением);

2. $P(n)$ остается истинным предложением (утверждением), если n увеличить на единицу, то есть $P(n+1)$ - истинное предложение (утверждение).

Таким образом метод математической индукции предполагает два этапа:

1. Этап проверки: проверяется, истинно ли предложение (утверждение) $P(1)$.

2. Этап доказательства: предполагается, что предложение $P(n)$ истинно, и доказывается истинность предложения $P(n+1)$ (n увеличено на единицу).

Замечание 1. В некоторых случаях метод математической индукции используется в следующей форме:

Пусть m - натуральное число, $m > 1$ и $P(n)$ - предложение, зависящее от n, $n \geq m$.

Если

1. $P(m)$ справедливо;

2. $P(n)$, будучи истинным предложением, влечет истинность предложения $P(n+1)$ для любого натурального n, $n \geq m$, тогда $P(n)$ - истинное предложение для любого натурального n, $n \geq m$.

В дальнейшем рассмотрим примеры применения метода математической индукции.

Пример 1. Доказать следующие равенства

$a)$ $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

$b)$ $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$,

$c)$ $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

$d)$ $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$,

$e)$ $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

$f)$ $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$,

$g)$ формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^3a^{n-3}b^3+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n,\quad a,b\in\mathbf{R},$$

где $n\in\mathbf{N}$.

Решение. а) При $n=1$ равенство примет вид $1=\dfrac{1\cdot 2}{2}$, 1=1, следовательно, $P(1)$ истинно. Предположим, что данное равенство справедливо, то есть, имеет место

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Следует проверить (доказать), что $P(n+1)$, то есть

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

истинно. Поскольку (используется предположение индукции)

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1),$$

получим

$$1+2+3+\ldots+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

то есть, $P(n+1)$ - истинное утверждение.

Таким образом, согласно методу математической индукции, исходное равенство справедливо для любого натурального n.

Замечание 2. Этот пример можно было решить и иначе. Действительно, сумма $1+2+3+\ldots+n$ есть сумма первых n членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1=1$ и разностью $d=1$. В силу известной формулы $\left(S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n\right)$, получим

$$S_n=\frac{1+n}{2}\cdot n.$$

b) При $n = 1$ равенство примет вид: $2 \cdot 1 - 1 = 1^2$ или 1=1, то есть, $P(1)$ истинно. Допустим, что имеет место равенство

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2,$$

и докажем, что имеет место $P(n+1)$:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$$

или

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Используя предположение индукции, получим

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Таким образом, $P(n + 1)$ истинно и, следовательно, требуемое равенство доказано.

Замечание 3. Этот пример можно решить (аналогично предыдущему) без использования метода математической индукции.

c) При $n = 1$ равенство истинно: $1^2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, 1=1. Допустим, что истинно равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6},$$

и покажем, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6},$$

то есть истинность $P(n)$ влечет истинность $P(n + 1)$. Действительно,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 =$$
$$= (n + 1)\left[\frac{n(2n + 1)}{6} + (n + 1)\right] = \frac{n + 1}{6}\left[n(2n + 1) + 6(n + 1)\right] = \frac{n + 1}{6}(2n^2 + 7n + 6),$$

и, так как $2n^2 + 7n + 6 = (2n + 3)(n + 2)$, получим

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6},$$

и, следовательно, исходное равенство справедливо для любого натурального n.

d) При $n = 1$ равенство справедливо: $1^3 = \left[\dfrac{1\cdot 2}{2}\right]^2$, 1=1. Допустим, что имеет место

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

и докажем, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

Действительно,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] =$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4n + 4) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

e) Утверждение $P(1)$ справедливо: $1\cdot 2 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$, 2=2. Допустим, что равенство

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

справедливо, и докажем, что оно влечет равенство

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Действительно,

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) =$$

$$= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Следовательно, исходное равенство имеет место для любого натурального n.

f) $P(1)$ справедливо: $\dfrac{1}{1\cdot 3} = \dfrac{1}{2\cdot 1 + 1}$, $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$. Пусть имеет место равенство $P(n)$:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Покажем, что последнее равенство влечет следующее:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Действительно, учитывая, что $P(n)$ имеет место, получим

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=$$

$$=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}.$$

Таким образом, равенство доказано.

g) При $n=1$ имеем $a+b=b+a$ и, следовательно, равенство справедливо.

Пусть формула бинома Ньютона справедлива при $n=k$, то есть,

$$(a+b)^k=a^k+C_k^1a^{k-1}b+\ldots+b^k.$$

Тогда

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)=(a^k+C_k^1a^{k-1}b+\ldots+b^k)(a+b)=$$

$$=a^{k+1}+(1+C_k^1)a^kb+(C_k^1+C_k^2)a^{k-1}b^2+\ldots+(C_k^s+C_k^{s+1})a^{k-s}b^s+\ldots+b^{k+1}.$$

Используя равенство $C_k^s+C_k^{s+1}=C_{k+1}^{s+1}$, получим

$$(a+b)^{k+1}=a^{k+1}+C_{k+1}^1a^kb+C_{k+2}^2a^{k-1}b^2+\ldots+C_{k+1}^{s+1}a^{k-s}b^{s+1}+\ldots+b^{k+1}.$$

Пример 2. Доказать неравенства

a) неравенство Бернулли: $(1+\alpha)^n\geq 1+n\alpha,\ \alpha>-1,\quad n\in\mathbf{N}$.

b) $x_1+x_2+\ldots+x_n\geq n$, если $x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n=1$ и $x_i>0,\ i=\overline{1,n}$.

c) неравенство Коши относительно среднего арифемтического и среднего геометрического

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n},\quad \text{где}\ \ x_i>0,\ i=\overline{1,n},\ n\geq 2.$$

d) $\sin^{2n}\alpha+\cos^{2n}\alpha\leq 1,\quad n\in\mathbf{N}$.

e) $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<\frac{5n-2}{2n},\quad n\in\mathbf{N}$.

f) $2^n>n^3,\quad n\in\mathbf{N},\ n\geq 10$.

Решение. а) При $n=1$ получаем истинное неравенство

$$1+\alpha\geq 1+\alpha.$$

Предположим, что имеет место неравенство

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \tag{1}$$

и покажем, что тогда имеет место и

$$(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha.$$

Действительно, поскольку $\alpha > -1$ влечет $\alpha + 1 > 0$, то умножая обе части неравенства (1) на $(\alpha + 1)$, получим

$$(1+\alpha)^n(1+\alpha) \geq (1+n\alpha)(1+\alpha)$$

или

$$(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2.$$

Поскольку $n\alpha^2 \geq 0$, следовательно,

$$(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (n+1)\alpha.$$

Таким образом, если $P(n)$ истинно, то и $P(n+1)$ истинно, следовательно, согласно принципу математической индукции, неравенство Бернулли справедливо.

b) При $n = 1$ получим $x_1 = 1$ и, следовательно, $x_1 \geq 1$ то есть $P(1)$ - справедливое утверждение. Предположим, что $P(n)$ истинно, то есть, если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - n положительных чисел, произведение которых равно единице, $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$.

Покажем, что это предложение влечет истинность следующего: если $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ - $(n+1)$ положительных чисел, таких, что $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$, тогда $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1$.

Рассмотрим следующие два случая:

1) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1} = 1$. Тогда сумма этих чисел равна $(n+1)$, и требуемое неравество выполняется;

2) хотя бы одно число отлично от единицы, пусть, например, больше единицы. Тогда, поскольку $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$, существует еще хотя бы одно число, отличное от единицы (точнее, меньше единицы). Пусть $x_{n+1} > 1$ и $x_n < 1$. Рассмотрим n положительных чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, (x_n \cdot x_{n+1}).$$

Произведение этих чисел равно единице, и, согласно гипотезе,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \geq n.$$

Последнее неравенство переписывается следующим образом:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} + x_n + x_{n+1} \geq n + x_n + x_{n+1}$$

или

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} \geq n + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1}.$$

Поскольку

$$(1 - x_n)(x_{n+1} - 1) > 0,$$

то

$$n + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} = n + 1 + x_{n+1}(1 - x_n) - 1 + x_n =$$

$$= n + 1 + x_{n+1}(1 - x_n) - (1 - x_n) = n + 1 + (1 - x_n)(x_{n+1} - 1) \geq n + 1.$$

Следовательно,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1,$$

то есть, если $P(n)$ справедливо, то и $P(n+1)$ справедливо. Неравенство доказано.

Замечание 4. Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

c) Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - произвольные положительные числа. Рассмотрим следующие n положительных чисел:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}, \ \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}, \ \ldots \ , \ \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}.$$

Поскольку их произведение равно единице:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} \cdot \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} = \frac{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = 1,$$

согласно ранее доказанному неравенству b), следует, что

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} \geq n,$$

откуда

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Замечание 5. Равенство выполняется если и только если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

d) $P(1)$ - справедливое утверждение: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Предположим, что $P(n)$ - истинное утверждение:

$$\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \le 1,$$

и покажем, что имеет место $P(n+1)$. Действительно,

$$\sin^{2(n+1)}\alpha + \cos^{2(n+1)}\alpha = \sin^{2n}\alpha\cdot\sin^2\alpha + \cos^{2n}\alpha\cdot\cos^2\alpha < \sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \le 1$$

(если $\sin^2\alpha \le 1$, то $\cos^2\alpha < 1$, и обратно: если $\cos^2\alpha \le 1$, то $\sin^2\alpha < 1$). Таким образом, для любого $n \in \mathbf{N}$ $\quad \sin^{2n}\alpha + \cos^{2n} \le 1$, и знак равенства достигается лишь при $n = 1$.

e) При $n = 1$ утверждение справедливо: $\dfrac{1}{1!} < \dfrac{5-2}{2\cdot 1}$, $\quad 1 < \dfrac{3}{2}$.

Допустим, что $\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} < \dfrac{5n-2}{2n}$, и докажем, что

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)}.$$

Поскольку

$$(n+1)! > n(n+1) \;\Rightarrow\; \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{n(n+1)} \;\Rightarrow\; \frac{1}{(n+1)!} < \frac{2}{2n(n+1)} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{(n+1)!} < \frac{(5n+3)\cdot n - (5n-2)(n+1)}{2(n+1)n} \;\Rightarrow\; \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)} - \frac{5n-2}{2n} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{5n-2}{2n} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)},$$

учитывая $P(n)$, получим

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n-2}{2n} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)}.$$

f) Учитывая замечание 1, проверим $P(10) : 2^{10} > 10^3$, $1024 > 1000$, следовательно, для $n = 10$ утверждение справедливо. Предположим, что $2^n > n^3 \quad (n > 10)$ и докажем $P(n+1)$, то есть $2^{n+1} > (n+1)^3$.

Поскольку при $n > 10$ имеем $2 > \left(\dfrac{1}{n}\right)^3$ или $2 > 1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}$, следует, что

$$2n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \;\text{ или }\; n^3 > 3n^2 + 3n + 1.$$

Учитывая неравенство $2^n > n^3$, получим

$$2^{n+1} = 2^n\cdot 2 = 2^n + 2^n > n^3 + n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3.$$

Таким образом, согласно методу математической индукции, для любого натурального n, $n \geq 10$ имеем $2^n > n^3$.

Пример 3. Доказать, что для любого $n \in \mathbf{N}$

$$a)\ n(2n^2 - 3n + 1) \text{ делится на } 6,$$

$$b)\ 6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1} \text{ делится на } 11.$$

Решение. a) $P(1)$ - истинное утверждение (0 делится на 6). Пусть $P(n)$ справедливо, то есть $n(2n^2 - 3n + 1) = n(n-1)(2n-1)$ делится на 6. Покажем, что тогда имеет место $P(n+1)$, то есть, $(n+1)n(2n+1)$ делится на 6. Действительно, поскольку

$$\begin{aligned}
&n(n+1)(2n+1) = n(n-1+2)(2n-1+2) = (n(n-1)+2n)(2n-1+2) = \\
&= n(n-1)(2n-1) + 2n(n-1) + 2n(2n+1) = n(n-1)(2n-1) + 2n \cdot 3n = \\
&= n(n-1)(2n-1) + 6n^2
\end{aligned}$$

и, как $n(n-1)(2n-1)$, так и $6n^2$ делятся на 6, тогда и их сумма $n(n+1)(2n+1)$ делится 6.

Таким образом, $P(n+1)$ - справедливое утверждение, и, следовательно, $n(2n^2 - 3n + 1)$ делится на 6 для любого $n \in \mathbf{N}$.

b) Проверим $P(1)$: $6^0 + 3^2 + 3^0 = 11$, 11=11, следовательно, $P(1)$ - справедливое утверждение. Следует доказать, что если $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11 ($P(n)$), тогда и $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ также делится на 11 ($P(n+1)$). Действительно, поскольку

$$6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n = 6^{2n-2+2} + 3^{n+1+1} + 3^{n-1+1} =$$

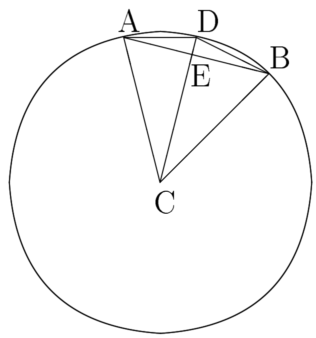
$$= 6^2 \cdot 6^{2n-2} + 3 \cdot 3^{n+1} + 3 \cdot 3^{n-1} = 3 \cdot (6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) + 33 \cdot 6^{2n-2},$$

и, как $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$, так и $33 \cdot 6^{2n-2}$ делятся на 11, тогда и их сумма $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ делится на 11. Утверждение доказано.

Индукция в геометрии

Пример 4. Вычислить сторону a_{2^n} правильного 2^n-угольника, вписанного в окружность радиуса R.

Решение. При $n = 2$, правильный 2^2-угольник есть квадрат, и в этом случае $a_4 = R\sqrt{2}$.



Пусть $a_{2^n} = a'$ и определим $a_{2^{n+1}} = a''$. Если $AB = a'$, то $AE = \dfrac{a'}{2}$; $BD = a''$. По теореме Пифагора, из прямоугольного треугольника $\triangle DEB$

$$a'' = \sqrt{\left(\frac{a'}{2}\right)^2 + DE^2}.$$

В свою очередь $DE = R - EC$ и

$$EC^2 = BC^2 - BE^2 = R^2 - \left(\frac{a'}{2}\right)^2.$$

Таким образом, $DE = R - \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{a'}{2}\right)^2}$, и, следовательно,

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{\left(\frac{a'}{2}\right)^2 + R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{a'}{4}\right)^2}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}}},$$

формула перехода от n к $n+1$.

В частных случаях

$$a_4 = R\sqrt{2} \;\Rightarrow\; a_8 = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{R^2 \cdot 2}{4}}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

$$a_{16} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}R^2(2 - \sqrt{2})}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

Возникает гипотеза

$$a_{2^n} = R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ раз}}}. \tag{2}$$

Как ранее было показано при $n = 1$, что эта формула справедлива. Пусть (2) выполняется при $n = k$. Вычислим $a_{2^{n+1}}$. Согласно формуле перехода, получим:

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - R^2\frac{2-\underbrace{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{n-2\text{ раз}}}{4}}} = R - \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{ раз}}}.$$

Замечание. Из (2) следует, что длина окружности равна

$$l = \lim_{n\to\infty} 2^n R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-2\text{ раз}}},$$

и, поскольку $l = 2\pi R$, получим

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{ раз}}}.$$

Упражнения для самостоятельной работы

I. Доказать равенства

$$a)\ 1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3},$$

$$b)\ 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \ldots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}, \quad n > 1,$$

$$c)\ \sin x + \sin(x+\alpha) + \ldots + \sin(x+n\alpha) = \frac{\sin(x+\frac{n\alpha}{2})\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$d)\ \frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \frac{3^2}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)},$$

$$e)\ \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{5}{\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{6}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{5}{4} - \frac{2n+5}{2(n+1)(n+2)},$$

$$f)\ 2 + 7 + 14 + \ldots + (n^2+2n-1) = \frac{n(2n^2+9n+1)}{6},$$

$$g)\ \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cdots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\sin\alpha},$$

$$h)\ \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \sin\frac{nx}{2} \cdot \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$

$$i)\ \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$$j)\ \sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}},$$

$$k)\ \cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}},$$

$$l)\ \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x \quad (x \neq m\pi),$$

$$m)\ \operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arcctg} 5 + \ldots + \operatorname{arcctg}(2n+1) = \\ = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n} - n\operatorname{arctg} 1.$$

II. Доказать неравенства

$a)$ $2^n > 2n+1 \quad (n \geq 3)$,

$b)$ $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$,

$c)$ $|a_1+a_2+\ldots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$,

$d)$ $2!4!\ldots(2n)! > [(n+1)!]^n, \quad n \geq 2$,

$e)$ $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad n > 1$,

$f)$ $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in \mathbf{N}; \quad \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$,

$g)$ $\frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

III. Доказать, что при любом натуральном n число a_n делится на b.

$a)$ $a_n = 5^{n+3}+11^{3n+1}, \quad b=17$,

$b)$ $a_n = 11^{n+2}+12^{2n+1}, \quad b=133$,

$c)$ $a_n = 2n^3+3n^2+7n, \quad b=6$,

$d)$ $a_n = 10^n+18n-28, \quad b=27$,

$e)$ $a_n = n^5-n, \quad b=30$.

IV. Показать, что $\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\ldots} \longrightarrow \pi$ (Формула Виета).

V. Вычислить радиусы r_n, R_n вписанной и описанной окружностей правильного 2^n-угольника с периметром p.

VI. Пусть даны n произвольных квадратов. Доказать, что эти квадраты могут быть разрезаны так, чтобы из получившихся частей можно было образовать квадрат.