Министерство Образования и Науки
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, июнь, 1999
Гуманитарный профиль
IV Вариант

Время решения - 180 минут

1. Определить, какому числовому множеству принадлежит значение выражения $25^{\log_5 6} + 7^{\frac{1}{\log_5 7}}$.

Решение. Используя основное логарифмическое тождество ($a^{\log_a b} = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$), формулу $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ ($a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$), получим

$$25^{\log_5 6} + 7^{\frac{1}{\log_5 7}} = 5^{2\log_5 6} + 7^{\log_7 5} = \left(5^{\log_5 6}\right)^2 + 5 = 6^2 + 5 = 41.$$

Таким образом, значение выражения - натуральное число.

Замечание. Обратим внимание, что $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \ldots$

2. Привести пример совместной неопределенной системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Решение. Например, система

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2, \end{cases}$$

совместна и неопределена. Действительно, решениями этой системы являются $x = 1 - a$, $y = a$, $a \in \mathbf{R}$.

3. Определить область определения функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \lg x$.

Решение. Область определения функции $f(x)$ находится из системы неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

(выражение под знаком квадратного корня должно быть неотрицательным, а под знака логарифма - положительным). Решая систему, получим $D(f) = (0; 1] \cup [2; +\infty)$.

4. Решить уравнение $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{2}$.

Решение. ОДЗ уравнения есть $\mathbf{R}$. Перепишем уравнение в виде

$$2(e^x - \frac{1}{e^x}) = e^x + \frac{1}{e^x}$$

или $e^x - \dfrac{3}{e^x} = 0$, откуда следует, что $e^{2x} = 3$ и $x = \frac{1}{2}\ln 3$.

5. Определить интервалы монотонности функции $f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ и сравнить значения функции в точках $x_1 = \log_5 4$ и $x_2 = \log_5 3$.

Решение. Поскольку $f'(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$, используя метод интервалов, получим, что $f'(x) > 0$ для $x \in (1; +\infty)$ и $f'(x) < 0$ для $x \in (0; 1)$. Следовательно, при $x \in (0; 1)$ функция $f(x)$ строго убывает и, поскольку

$$0 = \log_5 1 < \log_5 3 < \log_5 4 < \log_5 5 = 1,$$

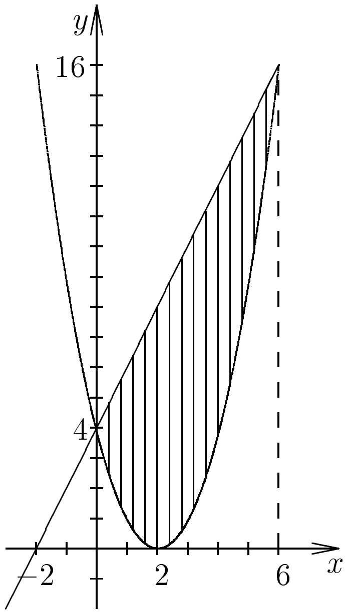
следует, что $f(\log_5 3) > f(\log_5 4)$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = x^2 - 4x + 4$ и $g(x) = 2x + 4$.

Решение. Площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = x^2 - 4x + 4$ и $g(x) = 2x + 4$ (см. рисунок), определяется, используя формулу

$$S = \int\limits_a^b [g(x) - f(x)]dx,$$

где a и b - пределы интегрирования.



Для того, чтобы определить a и b, решим уравнение $f(x) = g(x)$, то есть, $x^2 - 4x + 4 = 2x + 4$ или $x^2 - 6x = 0$, откуда, учитывая, что $a < b$, получим $a = x_1 = 0$ и $b = x_2 = 6$.

Следовательно,

$$S = \int\limits_0^6 (2x + 4 - x^2 + 4x - 4)dx = \int\limits_0^6 (6x - x^2)dx = \left(3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^6 = 3 \cdot 36 - 36 \cdot 2 = 36(\textit{кв.ед.}).$$

7. Пусть $f(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{\cos x}$. Определить значение выражения $f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + f\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$.

Решение. Область определения функции f есть множество $\mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.\right\}$ Используя формулы приведения $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$, получим

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{2\cos(\frac{\pi}{2} - x) + 1}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} + \frac{2\cos(\frac{\pi}{2} + x) + 1}{\cos(\frac{\pi}{2} + x)} =$$

$$= \frac{2\sin x + 1}{\sin x} + \frac{-2\sin x + 1}{-\sin x} = \frac{2\sin x + 1 + 2\sin x - 1}{\sin x} = \frac{4\sin x}{\sin x} = 4.$$

(заметим, что, если $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$, тогда $\dfrac{\pi}{2} \pm x \neq \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$).

8. Какой член разложения бинома $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$ не содержит a?

Решение. Поскольку $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{-\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{3} = a^{\frac{3}{4}}$, запишем бином в форме $\left(a^{-\frac{2}{3}} + a^{\frac{3}{4}}\right)^{17}$. Используя формулу биноминального коэффициента

$$T_{k+1} = C_{17}^{k}\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{17-k}\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{k},$$

получим уравнение

$$\frac{-2(17-k)}{3} + \frac{3k}{4} = 0$$

или $-8(17-k) + 9k = 0$, откуда $k = 8$.

Следовательно,

$$T_9 = C_{17}^{8} = \frac{17!}{8!9!} = 24310.$$

9. В сферическое тело объема 10см^3 вписан конус, осевое сечение которого - прямоугольный треугольник. Найти объем конуса.

Решение. Поскольку осевое сечение конуса - прямоугольный (равнобедренный!) треугольник, то его гипотенуза совпадает с диаметром. Следовательно радиус основания конуса r, радиус сферы R и высота конуса h равны: $r = R = h$.

Поскольку $\dfrac{4\pi}{3}R^3 = 10$, следует, что $R^3 = \dfrac{30}{4\pi}$, а объем конуса равен

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi\frac{30}{4\pi} = \frac{5}{2}(\textit{куб.ед.})$$