Министерство Образования и Науки
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, июнь, 1999
Гуманитарный профиль
III Вариант

Время решения - 180 минут

1. Определить, какому числовому множеству принадлежит числовое выражение

$$\frac{1}{4+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4-2\sqrt{3}}.$$

Решение. Приведя к общему знаменателю, получим

$$\frac{1}{4+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4-2\sqrt{3}}=\frac{4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}}{4^2-(2\sqrt{3})^2}=\frac{8}{16-12}=2.$$

Ответ. Множеству натуральных чисел.
Замечание. Нужно принять во внимание, что $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}\ldots$

2. Написать полиномиальное уравнение третьего порядка, если известно, что одним из корней этого уравнения является $x=1$.

Решение. Пусть корнями искомого уравнения являются $x_1=1,\ x_2=2$ и $x_3=3$. Тогда, согласно теореме Безу,

$$P_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\ \text{ или }\ P_3(x)=x^3-6x^2+11x-6.$$

В общем случае, если коэффициэнты многочлена $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ удовлетворяют условию $a_0+a_1+a_2+a_3=0$, то $x=1$ есть корень уравнения $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$.

3. Найти сумму действительных корней уравнения $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$.

Решение. ОДЗ уравнения есть множество $\mathbf{R}$. Обозначив $\sqrt[3]{x}=t$, получим квадратное уравнение $2t^2+t-3=0$, решения которого $t_1=1$ и $t_2=-\dfrac{3}{2}$.

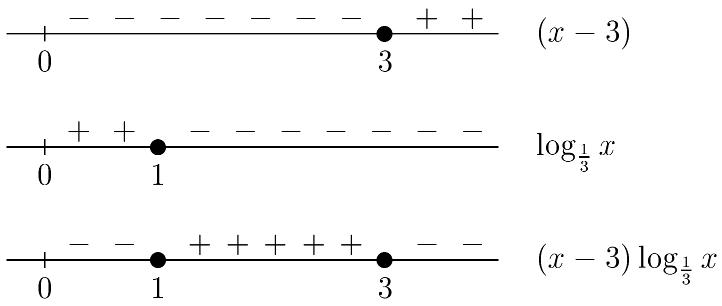
Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x}=1,\\ \sqrt[3]{x}=-\dfrac{3}{2},\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x_1=1,\\ x_2=-\dfrac{27}{8},\end{array}\right.$$

следовательно, сумма действительных корней исходного уравнения равна $x_1+x_2=-\dfrac{19}{8}$.

4. Решить неравенство $(x-3)\cdot\log_{\frac{1}{3}}x\leq 0$.

Решение. ОДЗ неравенства есть множество $(0;+\infty)$. Используем обобщенный метод интервалов.



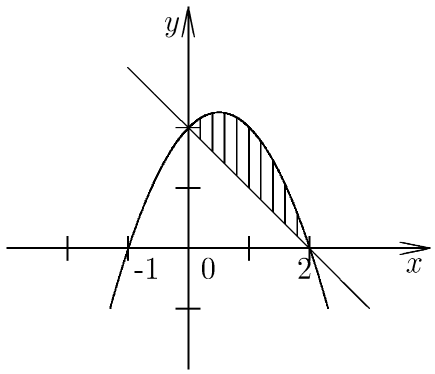
Получим: $x \in (0,1] \cup [3;+\infty)$.

5. Показать, что парабола $y = x^2 - x + 5,35$ не пересекает график функции $f(x) = 2\sin x + 3$.

Решение. Поскольку $x^2 - x + 5,35 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 5,35 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 5,1$, область значений функции $y = x^2 - x + 5,35$ есть множество $[5,1;+\infty)$. В то же время, $|\sin x| \leq 1$ влечет $1 \leq 2\sin x + 3 \leq 5$ и, следовательно, графики данных функций не пересекаются.

6. Определить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = 2 + x - x^2$ и $g(x) = 2 - x$.

Решение.



Площадь S фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = 2 + x - x^2$ и $g(x) = 2 - x$ (см. рисунок) определяется по формуле

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx,$$

где a и b - пределы интегрирования, которые определяются при решении уравнения $f(x) = g(x)$.

В данном случае

$$2 + x - x^2 = 2 - x \quad \text{или} \quad x^2 - 2x = 0$$

откуда, учитывая, что $a < b$, получим $a = 0,\ b = 2$.

Следовательно,

$$S = \int_0^2 (2 + x - x^2 - 2 + x)dx = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}(\text{кв.ед.})$$

7. При каких действительных значениях значениях параметра a система

$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ 3x + ay + z = 1, \\ 3x + y + az = 1, \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Согласно правилу Крамера, данная система будет иметь единственное решение, тогда и только тогда, когда ее главный определитель будет отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & a & 1 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$a^3 - 7a + 6 \neq 0,$$

откуда, учитывая, что

$$\begin{aligned} a^3 - 7a + 6 &= a^3 - a - 6a + 6 = a(a^2 - 1) - (6a - 6) = a(a-1)(a+1) - 6(a-1) = \\ &= (a-1)(a^2 + a - 6) = (a-1)(a+2)(a-3) \end{aligned}$$

получим $a \neq 1,\ a \neq -2$ и $a \neq 3$ или $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1, 3\}$.

8. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$ в точке $x_0 = -3$.

Решение. Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 есть

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

где $f'(x_0)$ - значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Так как

$$f(x_0) = f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + \frac{1}{3}(-3)^3 = 9,$$

$$f'(x) = (2x^2 + \frac{1}{3}x^3)' = 4x + x^2,$$

$$f'(-3) = 4 \cdot (-3) + (-3)^2 = -3$$

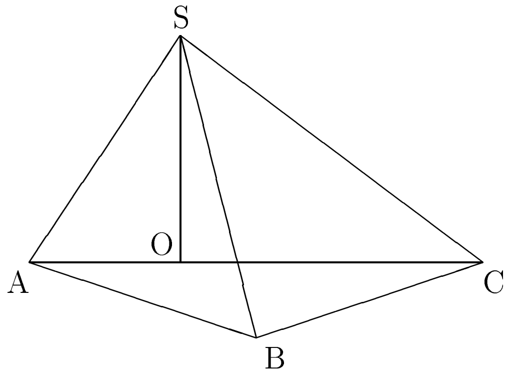
получим

$$y - 9 = -3(x + 3)$$

или, после элементарных преобразований, $y = -3x$.

9. В основании треугольной пирамиды - прямоугольный треугольник с катетами 12см и 16см. Найти объем пирамиды, если известно, что боковые ребра равны и имеют длину $2\sqrt{41}$см.

Решение.



Поскольку все боковые ребра равны, высота пирамиды падает в центр описанной окружности основания, то есть, основание высоты находится в середине гипотенузы AC.

Так как

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20(\text{см}),$$

$$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10(\text{см}),$$

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{164 - 100} = \sqrt{64} = 8(\text{см}),$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96(\text{см}^2)$$

получим

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 96 \cdot 8 = 256(\text{см}^3).$$