Министерство Образования и Науки
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, июнь, 1999
Гуманитарный профиль
II Вариант

Время решения - 180 минут

1. Пусть $f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R},\ f(x) = \dfrac{2^x}{2^{2x}-1}$. Вычислить $f(\log_2 3)$.

Решение. Используя основное логарифмическое тождество ($a^{\log_a b} = b,\ a > 0,\ a \neq 1,$ $b > 0$), получим

$$f(\log_2 3) = \frac{2^{\log_2 3}}{2^{2\log_2 3}-1} = \frac{3}{\left(2^{\log_2 3}\right)^2 - 1} = \frac{3}{3^2-1} = \frac{3}{8}.$$

2. Написать уравнение второго порядка с действительными корнями, произведение которых равнялось бы четырем.

Решение. Используя обратную теорему Виета, например, для $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$ (тогда $x_1 \cdot x_2 = 4,\ x_1 + x_2 = 5$), получим квадратное уравнение

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

3. Пусть $z = \dfrac{1-i}{2+i}$. Определить, при каких значениях a и b справедливо равенство $\sqrt{5} \cdot z + a + bi = 5 - 3i$.

Решение. Так как

$$z = \frac{1-i}{2+i} = \frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{1-3i}{2^2+1^2} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i,$$

то равенство принимает вид

$$\sqrt{5}\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right) + a + bi = 5 - 3i$$

или

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + a\right) + \left(b - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)i = 5 - 3i,$$

откуда, используя определение равенства двух комплексных чисел ($z_1 = z_2 \Leftrightarrow Rez_1 = Rez_2$ и $Imz_1 = Imz_2$), получим систему

$$\begin{cases} a + \dfrac{1}{\sqrt{5}} = 5, \\ b - \dfrac{3}{\sqrt{5}} = -3, \end{cases}$$

решение которой $a = 5 - \dfrac{1}{\sqrt{5}},\quad b = \dfrac{3}{\sqrt{5}} - 3.$

4. Пусть дана функция $f(x) = 1 - \cos x$. Вычислить значение выражения $f\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

Решение. Используя формулы приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$, получим

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1-\sin x+1+\sin x=2.$$

5. При каких действительных значениях параметра m многочлен $2x^3 - x^2 + mx - 2$ делится на $x - 2$.

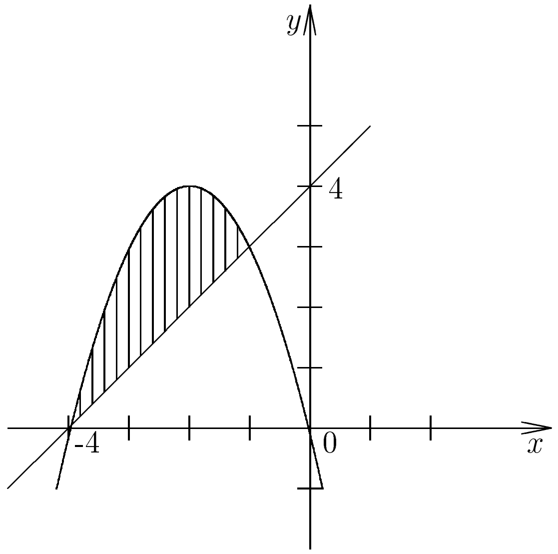
Решение. Поскольку

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 2^2 + m \cdot 2 - 2 = 10 + 2m,$$

решая линейное уравнение $10 + 2m = 0$, получим $m = -5$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = -x^2 - 4x$ и $g(x) = 4 + x$.

Решение.



Искомая площадь определяется, используя формулу

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx,$$

где a и b - пределы интегрирования.

Для определения a и b решим уравнение $f(x) = g(x)$, то есть,

$$-x^2 - 4x = 4 + x$$

или

$$x^2 + 5x + 4 = 0,$$

откуда, учитывая, что $a < b$, получим $x_1 = a = -4,\ x_2 = b = -1$.

Таким образом,

$$S = \int\limits_{-4}^{-1}(-x^2-4x-x-4)dx = \int\limits_{-4}^{-1}(-x^2-5x-4)dx = -\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_{-4}^{-1} =$$
$$= -\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4+\frac{64}{3}-40+16\right) = 4,5(\textit{кв.ед.}).$$

7. Пусть функция $f : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{R}$, $(\mathbf{D} \subset \mathbf{R})$, $f(x) = \sqrt{x^2-3x+1}$. Решить уравнение $3f(x) = 2f'(x)$.

Решение. Используя правило нахождения производной сложной функции, находим $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2-3x+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-3x+1}}\cdot(x^2-3x+1)' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+1}},$$

и уравнение примет вид

$$3\sqrt{x^2-3x+1} = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+1}},$$

или

$$3(x^2-3x+1) = 2x-3,$$

откуда следует квадратное уравнение

$$3x^2-11x+6=0,$$

решения которого $x_1 = \dfrac{2}{3}$ и $x_2 = 3$.

После проверки остается $x = 3$.

8. Решить неравенство $\log_x \dfrac{x+3}{x-1} > 1$.

Решение. Используя утверждение 3 из **Логарифмические неравенства**, получим совокупность систем

$$\log_x\frac{x+3}{x-1} > 1 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x>1, \\ \dfrac{x+3}{x-1} > x, \\ x>0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0<x<1, \\ \dfrac{x+3}{x-1} < x, \\ \dfrac{x+3}{x-1} > 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in(1;3), \\ x\in\emptyset, \end{array}\right. \Leftrightarrow \ x\in(1;3).$$

Действительно, первая система совокупности (учитывая, что $x > 1$) равносильна системе

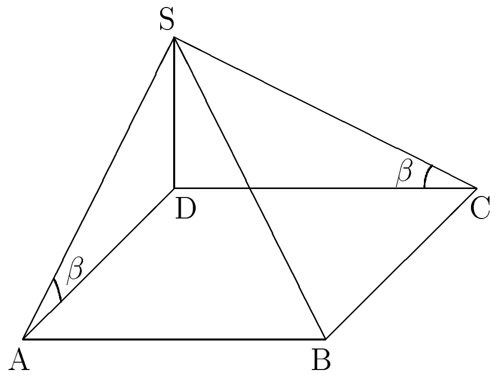
$$\left\{\begin{array}{l} x>1, \\ x+3 < x(x-1) \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l} x>1, \\ x^2-2x-3<0, \end{array}\right. \quad \text{откуда} \ \ x\in(1;3).$$

Вторая система не имеет решений, так как при $x \in (0;1)$ (первое неравенство) имеем $\dfrac{x+3}{x-1} < 0$, что противоречит последнему неравенству системы.

Таким образом, множеством решений исходного неравенства является (1;3).

9. Основание пирамиды - квадрат со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а остальные две образуют с ней угол β. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.



Рассмотрим прямоугольный треугольник SDC ($SD \perp DC$) и, используя метрические соотношения в прямоугольном треугольнике, получим

$$SD = \frac{CD}{\cos\angle DCS} = \frac{a}{\cos\beta},$$

$$SD = CD \operatorname{tg}\angle DCS = a \operatorname{tg}\beta,$$

и, поскольку $\triangle SDC = \triangle SDA$ (SD - общая сторона, $AD = DC$), то

$$S_{\triangle SDA} = S_{\triangle SDC} = \frac{1}{2} SD \cdot DC = \frac{1}{2} a \operatorname{tg}\beta \cdot a = \frac{a^2 \operatorname{tg}\beta}{2}.$$

Так как $SA \perp AB$ ($SC \perp BC$ - следует из теоремы о трех перпендикулярах), имеем

$$S_{\triangle SCB} = \frac{1}{2} SC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\cos\beta} \cdot a = \frac{a^2}{2\cos\beta}.$$

Аналогично, $S_{\triangle SAB} = \dfrac{a^2}{2\cos\beta}$.

Таким образом, площадь боковой поверхности пирамиды равна

$$S = S_{\triangle SDC} + S_{\triangle SDA} + S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} = a^2 \operatorname{tg}\beta + \frac{a^2}{\cos\beta} = a^2 \frac{\sin\beta + 1}{\cos\beta}.$$