Copyright©2008 ONG TCV Scoala Virtuala a Tanarului Matematician

Министерство просвещения и молодежи Республики Молдова
Агенство оценивания знаний и организации экзаменов
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, 17 июня 2008
Профиль: гуманитарный, искусство, спорт

Время работы: 180 минут.

В заданиях 1-4 запишите ответы на поставленные вопросы в отведенных местах.

1. Заполните пустую рамку, чтобы получилось истинное высказывание

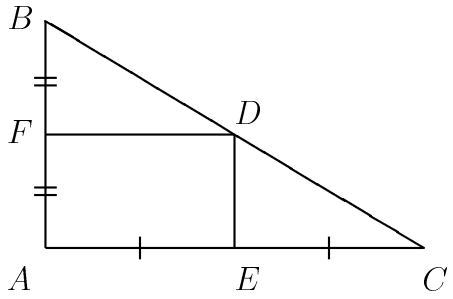
"Если $P(X) = X^3 - 2X^2 + 4$, то $P(\sqrt{2}) = \boxed{}$."

2. Обведите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно.

$10^{1+2\lg\sqrt{3}} = 20.$ И Л

3. Впишите в пустую рамку такое действительное число, чтобы функция $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{\square} x$ строго убывала на интервале $(0; +\infty)$.

4. В прямоугольный треугольник $ABC, m(\angle BAC) = 90^o$, вписан прямоугольник $AFDE$, длины сторон которого $AF = 3$ см, $AE = 5$ см. Если $AF = FB,\ AE = EC$, то площадь треугольника ABC равна $\boxed{}$ см^2.



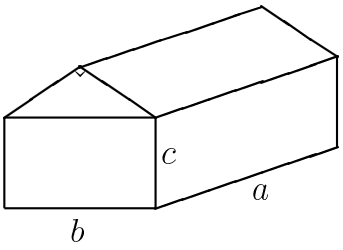
5. В двенадцатых классах теоретического лицея "Штефан чел Маре" обучается 50 учащихся, из которых 35 – девушки. Средний рост девушек двенадцатиклассниц составляет 168 см, а средний рост юношей – 176 см. Определите средний рост двенадцатиклассников теоретического лицея "Штефан чел Маре".

6. В разложении бинома $\left(\frac{1}{x^2} + 5\sqrt{x}\right)^n$ семнадцатый член не содержит x. Найдите n.

7. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Вычислите $A \times B$.

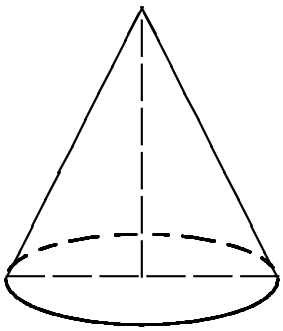
8. При каких действительных значениях a и b выполняется условие $3a+(5-2i)b = 1+2i$?

9. Используя данные рисунка, вычислите, сколько м^3 сена вместится в данный сарай (сарай не имеет потолка), если стропила крыши имеют одинаковую длину и образуют прямой угол, длина сарая $a = 12$ м, ширина $b = 8$ м и высота стен $c = 3$ м.



10. Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-10x+2008$. Найдите значение функции в точке ее локального минимума.

11. Высота прямого кругового конуса равна 15 см, а сумма длин образующей и радиуса основания равна 25 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.



12. Найдите действительные значения a, $a>0$, для которых выполняется условие $\int\limits_0^2 (x+e^a)dx=4e^{2a}$.

Решения

1. $P(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^3-2\cdot(\sqrt{2})^2+4=2\sqrt{2}-4+4=2\sqrt{2}$.
Ответ: $2\sqrt{2}$.

2. $10^{1+2\lg\sqrt{3}}=10^1\cdot 10^{2\lg\sqrt{3}}=10\cdot 10^{\lg 3}=10\cdot 3=30$. Поскольку $30\neq 20$, следует, что ответ: Л (ложно).

3. В рамку может быть вписано любое действительное число a, расположенное между 0 и 1 (согласно свойствам логарифмической функции $f(x)=\log_a x$, она является строго убывающей при $a\in(0,1)$).
Ответ: например, $a=\frac{1}{2}$.

4. Имеем: $AB=2\cdot AF=6$, $AC=2\cdot AE=10$ и $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AE=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 6=$ $=30$ (см^2).
Ответ: 30 см^2.

5. Число юношей в лицее равно: $50-35=15$. Определяем средний рост:

$$\frac{35\cdot 168+15\cdot 176}{50}=170,4 \text{ (см)}.$$

Ответ: $170,4$ см.

6. Используем формулу общего члена разложения бинома степени k:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Имеем $T_{17} = T_{16+1} = C_n^{16} x^{-2(n-16)} \left(5x^{\frac{1}{2}}\right)^{16} = C_n^{16} \cdot 5^{16} \cdot x^{-2n+32+8} = C_n^{16} 5^{16} x^{-2n+40}$. Поскольку T_{17} не содержит x, следует, что $-2n + 40 = 0$, откуда $n = 20$.

Ответ: $n = 20$.

7. Используя правило умножения двух матриц, получаем:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

8.

$$3a + 5b - 2bi = 1 + 2i.$$

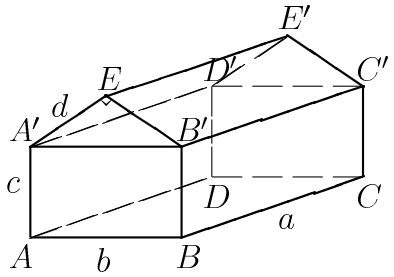
Из определения равенства двух комплексных чисел следует

$$\begin{cases} 3a + 5b = 1, \\ -2b = 2, \end{cases}$$

откуда $a = 2$ и $b = -1$.

Ответ: $a = 2, b = -1$.

9.



Определяем длину стропил d:

$$d = b \sin 45^o = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ (м)}.$$

Находим объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$:

$$V_1 = 12 \cdot 8 \cdot 3 = 288 \text{ (м}^3\text{)}.$$

Вычисляем объем призмы $A'B'EC'D'E'$:

$$V_2 = \frac{1}{2} A'E \cdot EB' \cdot EE' = \frac{1}{2} 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 12 = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6 = 192 \text{ (м}^3\text{)}.$$

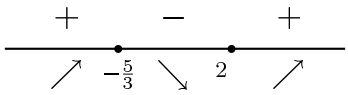
Определяем объем сарая: $V = V_1 + V_2 = 288 + 192 = 480$ (м^3).

Ответ: 480 м^3.

10. Вычисляем производную функции: $f'(x) = 3x^2 - x - 10$.

Находим критические точки: $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 - x - 10 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -\dfrac{5}{3},\; x_2 = 2.$

Определяем знак производной:

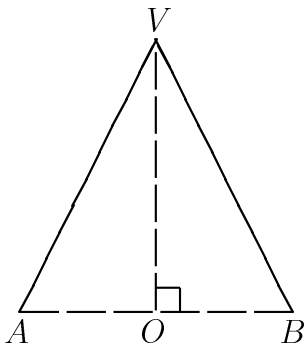


Следовательно, $x = 2$ является точкой локального минимума.

$$f_{min} = f(2) = 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 2008 = 1994.$$

Ответ: 1994.

11.



Площадь полной поверхности конуса:

$$A = \pi R^2 + \pi RG = \pi R(R + G).$$

Обозначим $OB = R,\; VO = H = 15,\; VB = G = 25 - R$. Согласно теореме Пифагора:

$$VB^2 = VO^2 + OB^2$$

или $(25 - R)^2 = 15^2 + R^2,\; 625 - 50R + R^2 = 225 + R^2,\; 50R = 400$ и $R = 8$ (см). Таким образом,

$$A = \pi \cdot 8 \cdot 25 = 200\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

12. Так как $\displaystyle\int_0^2 (x + e^a)dx = \left(\frac{x^2}{2} + e^a x\right)\Big|_0^2 = 2 + 2e^a - 0 = 2 + 2e^a$, получается уравнение $2 + 2e^a = 4e^{2a}$ или $2e^{2a} - e^a - 1 = 0$.

Обозначим $e^a = t$. Поскольку $a > 0 \;\Rightarrow\; t > 1$. Имеем

$$2t^2 - t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Оба решения не удовлетворяют условию $t > 1$, следовательно, исходное уравнение не имеет решений. Таким образом, не существует такого действительного $a > 0$, удовлетворяющего данному условию.

Ответ: $a \in \varnothing$.

Оценочная схема

Максимальное число баллов
- N 1 — 2 балла
- N 2 — 2 балла
- N 3 — 2 балла
- N 4 — 2 балла
- N 5 — 4 балла
- N 6 — 5 баллов
- N 7 — 6 баллов
- N 8 — 5 баллов
- N 9 — 6 баллов
- N 10 — 6 баллов
- N 11 — 7 баллов
- N 12 — 8 баллов
- всего: 55 баллов

Оценка
- ”10” — 54-55 баллов
- ”9” — 52-53 балла
- ”8” — 49-51 балл
- ”7” — 39-48 баллов
- ”6” — 27-38 баллов
- ”5” — 19-26 баллов
- ”4” — 14-18 баллов
- ”3” — 10-13 баллов
- ”2” — 5-9 баллов
- ”1” — 0-4 балла