Министерство образования Республики Молдова
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, 2002
Гуманитарный профиль

Время: 180 минут.

1. Вычислите $\log_3 5 \cdot \log_5 4 - \log_3 12$.

2. Определите координаты точки, симметричной точке $A(-1,2)$ относительно начала координат.

3. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4x+5}{6-3x-2x^2}$.

4. При каких значениях n имеет смысл выражение "$(5-n)!$" ?

5. Найдите значение выражения $3^{2x}+3^{-2x}$, если $3^x-3^{-x}=4$.

6. Для каких $x, y \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} x+1 & x+y \\ 0 & x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -x-1 \\ 0 & 9-2x \end{pmatrix}?$$

7. В $\triangle ABC$ $\angle B = 90^o$ и BK — медиана. Найдите площадь $\triangle BCK$, если $AB = 4$см, а $\angle A = 30^o$.

8. Найдите ту первообразную функции $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+2x-3x^2-1$, график которой проходит через точку $A(1,-1)$.

9. Чугунную деталь в форме усеченного конуса с радиусами оснований 4см и 22см расплавили, а из полученного металла отлили цилиндр с той же высотой, что и у усеченного конуса. Найдите радиус основания цилиндра.

10. Решите уравнение $\log^2_{0,5}(4x)+\log_2\dfrac{x^2}{8}=8$.

Решения

1. Используя свойства логарифма, получим:

$$\log_3 5 \log_5 4 - \log_3 12 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 5} - \log_3(3\cdot 4) = \log_3 4 - (\log_3 3 + \log_3 4) = -1.$$

2. Пусть точка B, симметичная точке $A(-1,2)$ относительно начала координат, имеет координаты (x_0, y_0). Поскольку $O(0,0)$ является серединой отрезка AB, получим

$$\begin{cases} \dfrac{x_0+(-1)}{2}=0, \\ \dfrac{y_0+2}{2}=0, \end{cases}$$

откуда $x_0=1$; $y_0=-2$.

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+5}{6-3x-2x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{3}{x}-2\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{3}{x}-2} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}1-4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{6\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}-3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}2} = \frac{1-4\cdot 0+5\cdot 0}{6\cdot 0-3\cdot 0-2} = -\frac{1}{2}.$$

4. Выражение $(5-n)!$ имеет смысл тогда и только тогда, когда $5-n \in \mathbb{N}$, то есть $\begin{cases} 5-n \geq 0, \\ n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$ откуда $n \leq 5$, $n \in \mathbb{Z}$.

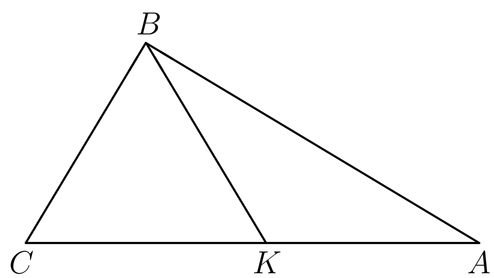
5. Поскольку $3^x - 3^{-x} = 4$, то $3^{2x} - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} + 3^{-2x} = 16$, следовательно, $3^{2x} + 3^{-2x} = 16 + 2 \cdot 3^{x+(-x)}$ или $3^{2x} + 3^{-2x} = 16 + 2 \cdot 3^0 = 16 + 2 = 18$.

Таким образом, $3^{2x} + 3^{-2x} = 18$.

6. Используя определение равенства двух матриц, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+1=2, \\ x+y=-x-1, \\ 0=0, \\ x-2y=9-2x, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=-3. \end{cases}$$

7.



Пусть $\triangle ABC$ — прямоугольный (угол $\angle B$ — прямой), $AK = KC$, $\angle BAC = 30^o$, $AB = 4$см. Тогда $BC = AB \operatorname{tg} 30^o$, $BC = 4 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Вычислим площадь $\triangle ABC$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Так как медиана BK делит треугольник ABC на два треугольника с равными площадями, следует, что

$$S_{\triangle BKC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

8. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$. Тогда

$$F(x) = \int f(x)dx = \int (4x^3 + 2x - 3x^2 - 1)dx = x^4 + x^2 - x^3 - x + C.$$

Поскольку $F(1) = -1$, следует, что $1+1-1-1+C = -1$ или $C = -1$. Таким образом, $F(x) = x^4 + x^2 - x^3 - x - 1$.

9. Найдем объем усеченного конуса:

$$V_1 = \frac{\pi}{3}(4^2 + 22^2 + 4 \cdot 22) \cdot h = \frac{\pi h}{3} \cdot 588 = 196\pi h,$$

где h — высота конуса.

Объем цилиндра такой же высоты и радиуса R равен

$$V_2 = \pi R^2 h.$$

Так как $V_1 = V_2$, следует, что $196\pi h = \pi R^2 h$, откуда $R^2 = 196$ и $R = 14$(см).

10. *ОДЗ*: $x > 0$. Используя свойства логарифмической функции, получим:

$$\log_{0,5}^2(4x) + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8 \;\Leftrightarrow\; \left[\log_{0,5}(4x)\right]^2 + \log_2 x^2 - \log_2 8 = 8 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; [-\log_2(4x)]^2 + 2\log_2 x - 3 - 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; (\log_2 4 + \log_2 x)^2 + 2\log_2 x - 11 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 4 + 4\log_2 x + \log_2^2 x + 2\log_2 x - 11 = 0 \;\Leftrightarrow\; \log_2^2 x + 6\log_2 x - 7 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -7, \\ \log_2 x = 1, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = 2^{-7}, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Оба решения удовлетворяют *ОДЗ*.

Оценочная схема

Максимальное число баллов

N 1 — 4 балла
N 2 — 2 балла
N 3 — 3 балла
N 4 — 4 балла
N 5 — 4 балла
N 6 — 5 баллов
N 7 — 5 баллов
N 8 — 5 баллов
N 9 — 6 баллов
N 10 — 8 баллов
всего: 46 баллов

Оценка

"10" — 45-46 баллов
"9" — 41-44 балла
"8" — 34-40 баллов
"7" — 27-33 балла
"6" — 21-26 баллов
"5" — 15-20 баллов
"4" — 10-14 баллов
"3" — 6-9 баллов
"2" — 2-5 баллов
"1" — 1 балл