Министерство Образования и Науки
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, 2000
Профиль: физика-математика, экономика, информатика-математика

Время: 180 минут.

1. Определить, какому числовому множеству принадлежит значение выражения $\frac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}+1}{\sqrt{5}-1}$. (5 очков)

2. Пусть даны функции $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$; $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = 2x - 3$. Найдите $f(g(x))$. (4 очка)

3. При каких значениях действительного параметра a уравнение $\sqrt{3}\cos x + \sin x = a$ имеет решения? (6 очков)

4. Вычислить длину кривой $x^2 + 5x + y^2 = 0$. (7 очков)

5. Решить неравенство $D(x) \geq 0$ где

$$D(x) = \begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$$

(8 очков)

6. Определить показатель степени, в котором нужно возвести $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, используя формулу бинома Ньютона, так чтобы $\frac{T_3}{T_4} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. (8 очков)

7. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{-7x-4}{3x^2+5x+2}dx.$$

(9 очков)

8. Центр вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит его высоту на отрезки длины 5 см и 3 см. Найдите длины сторон треугольника. (9 очков)

9. При каких значениях действительного параметра m, функция $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x(m - 3x - x^2)$ монотонно убывает на $\mathbf{R}$? (10 очков)

10. Разложить на простые множители в $\mathbf{C}$ многочлен $P(X) = X^4 + 13X^2 + 36$. (9 очков)

11. Площадь диагонального сечения правильной прямоугольной пирамиды равна S. Боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол β. Найдите объем пирамиды. (12 очков)

12. При каких значениях действительного параметра a, система

$$\begin{cases} y + \ln\frac{|y|}{y} = x \\ y + 2(x+a)^2 = x + 2a + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение? (13 очков)

Решения

1. Заметим, что $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{4+5-2\cdot 2\sqrt{5}}=\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=|2-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-2$ и получим

$$\frac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}-2+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=1.$$

Таким образом, значение данного выражения – натуральное число.

Замечание: $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}\ldots$ (см. и **варианты 1999 года**).

2. Используя определение сложной функции получим

$$f(g(x))=(2x-3)^2-3(2x-3)+2=4x^2-12x+9-6x+9+2=4x^2-18x+20.$$

3. Уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ имеет решения если и только если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$ (следует из метода вспомогательного угла). Следовательно, данное уравнение имеет решения лишь при $\left|\frac{a}{2}\right|\le 1$, откуда $a\in[-2,2]$.

4. Так как $x^2+5x+y^2=0\ \Leftrightarrow\ x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+y^2=0\ \Leftrightarrow\ (x+\frac{5}{2})^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$, то данная кривая есть окружность радиуса $R=\frac{5}{2}$ с центром в точке $M\left(-\frac{5}{2};0\right)$. Используя формулу для определения длины окружности, получим

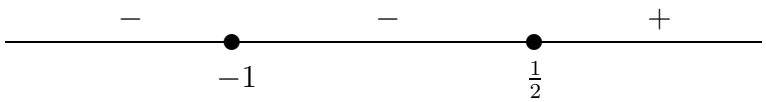
$$l=2\pi R=2\pi\frac{5}{2}=5\pi(\text{ед.длины}).$$

5. Используя свойство определителей, получим

$$D(x)=\begin{vmatrix}-1&x&x\\x&-1&x\\x&x&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x-1&2x-1&2x-1\\x&-1&x\\x&x&-1\end{vmatrix}=(2x-1)\begin{vmatrix}1&1&1\\x&-1&x\\x&x&-1\end{vmatrix}=$$

$$=(2x-1)\begin{vmatrix}1&1&1\\x+1&0&x+1\\x+1&x+1&0\end{vmatrix}=(2x-1)(x+1)^2\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=(2x-1)(x+1)^2$$

Неравенство $D(x)\ge 0$ примет вид $(2x-1)(x+1)^2\ge 0$. Используя метод интервалов



получим $x\in\{-1\}\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

6. Используя формулу для k-го слагаемого в разложении бинома Ньютона $(a+b)^n$,

$$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k,\quad (k=\overline{0,n}\ )$$

получим

$$\frac{T_3}{T_4}=\frac{C_n^2(\sqrt{2})^{n-2}(\sqrt{3})^2}{C_n^3(\sqrt{2})^{n-3}(\sqrt{3})^3}=\frac{C_n^2}{C_n^3}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

или, учитывая что $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$,

$$\frac{\dfrac{n(n-1)}{2}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}} = \frac{3}{4},$$

откуда следует $n-2=4$ и $n=6$.

7. Подинтегральная функция есть дробно-рациональная функция. Учитывая что корни трехчлена знаменателя есть действительные числа кратности один, разложим функцию на простые дроби

$$\frac{-7x-4}{3x^2+5x+2} = \frac{-7x-4}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+1)} = \frac{A}{3x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(3x+2)}{(3x+2)(x+1)}.$$

Используя метод неопределенных коэффициэнтов, найдем $A=2$ и $B=-3$. Следовательно

$$\int \frac{-7x-4}{3x^2+5x+2}dx = \int\left(\frac{2}{3x+2} - \frac{3}{x+1}\right)dx = 2\int\frac{dx}{3x+2} - 3\int\frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|3x+2| - 3\ln|x+1| + C.$$

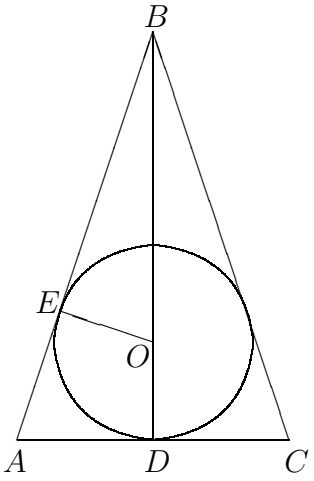
Согласно формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_0^1 \frac{-7x-4}{3x^2+5x+2}dx = \left(\frac{3}{2}\ln|3x+2| - 3\ln|x+1|\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3}(\ln 5 - \ln 2) - 3\ln 2 = \frac{2}{3}\ln 5 - \frac{11}{3}\ln 2.$$

8. Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AB=BC$), BD – высота ($BD\perp AC$) $O\in BD$ – центр вписанной окружности в $\triangle ABC$, $OB=5$ см, $OD=3$ см и, следовательно, $BD=8$ (см). Пусть E – точка касания стороны AB с окружностью. Тогда $OE\perp AB$ и следовательно $\triangle BOE$ – прямоугольный. Так как $OE=OD=3$, $BO=5$, согласно теореме Пифагоры

$$BE = \sqrt{BO^2-OE^2} = \sqrt{25-9} = 4(\text{см}).$$



Так как прямоугольные треугольники BOE и ABD подобны ($\angle B$ – общий), то

$$\frac{AB}{BO} = \frac{BD}{BE} = \frac{AD}{OE},$$

откуда

$$AB = \frac{BO \cdot BD}{BE} = \frac{5 \cdot 8}{4} = 10(\text{см}),$$
$$AD = \frac{BD \cdot OE}{BE} = \frac{8 \cdot 3}{4} = 6(\text{см}).$$

Поскольку BD – высота опущенная на основание равнобедренного тркугольника ABC, то BD – медиана и $AC = 2AD = 12(\text{см})$.

Таким образом $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см.

9. Функция $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$, $X \subset \mathbf{R}$ монотонно убывает на X если $f'(x) \leq 0$ для любого $x \in X$. Следовательно

$$f'(x) = e^x(m - 3x - x^2) + e^x(-3 - 2x) = -e^x(x^2 + 5x - m + 3) \leq 0.$$

Поскольку $e^x > 0$ для любого $x \in \mathbf{R}$, неравенство примет вид

$$x^2 + 5x - m + 3 \geq 0.$$

Последнее неравенство справедливо для любого $x \in \mathbf{R}$, если и только если ее дискриминант неположителен (см. **Формулы, Словари, Квадратный трехчлен**).

Следовательно: $25 - 4(3 - m) \leq 0$, откуда $m \leq -\frac{13}{4}$.

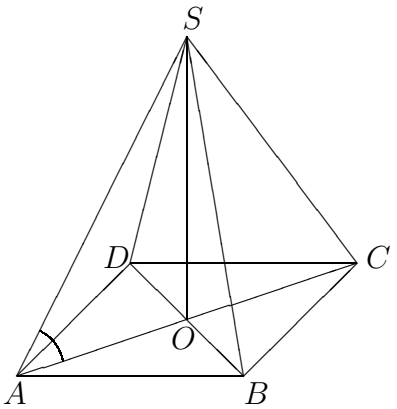
10. Рассмотрим биквадратное уравнение

$$x^4 + 13x^2 + 36 = 0,$$

корни которого (во множестве комплексных чисел) есть $x_1 = -2i$, $x_2 = 2i$, $x_3 = -3i$, $x_4 = 3i$. Следовательно

$$X^4 + 13X^2 + 6 = (X + 2i)(X - 2i)(X + 3i)(X - 3i).$$

11.



Пусть $SABCD$ – правильная четырехугольная пирамида ($ABCD$ – квадрат), площадь $\triangle SAC = S$, $\measuredangle SAC = \beta$, O – центр квадрата $ABCD$. Пусть $AO = a$. Тогда $AC = 2a$;

$SO = AO \cdot \operatorname{tg}\beta = a\operatorname{tg}\beta$ (из прямоугольного треугольника SAO) и площадь треугольника SAC

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot SO = \frac{1}{2}2a \cdot a\operatorname{tg}\beta = a^2\operatorname{tg}\beta$$

откуда $a^2 = S\operatorname{ctg}\beta$ и $a = \sqrt{S\operatorname{ctg}\beta}$. Следовательно $AB^2 = a^2+a^2 = 2a^2 = 2S\operatorname{ctg}\beta$ (площадь основания пирамиды), $SO = a\operatorname{tg}\beta = \sqrt{S\operatorname{ctg}\beta}\cdot\operatorname{tg}\beta$ (высота пирамиды) и

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SO = \frac{2}{3}S\operatorname{ctg}\beta\cdot\sqrt{S\operatorname{ctg}\beta}\cdot\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}S\sqrt{S\operatorname{ctg}\beta}(\text{куб.ед.})$$

12. Из первого уравнения системы следует $y = x$ и $x > 0$ (выражение $\ln\dfrac{|y|}{y}$ определено лишь для $y > 0$ – см. **Формулы, Словари, Модуль**). Тогда второе уравнение примет вид

$$2(x+a)^2 = 2a+4 \quad \text{или} \quad x^2+2ax+a^2-a-2 = 0.$$

Последнее уравнение имеет единственное решение, если

$$D = 4a^2-(a^2-a-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2 \quad \text{и} \quad x = 2 \quad (x > 0)$$

и единственное положительное решение, если

$$\left[\begin{array}{l} a^2-a-2 < 0, \\ \left\{\begin{array}{l} a^2-a-2 = 0, \\ -a > 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

откуда $a \in [-1;2)$.

Таким образом, $a \in \{-2\}\cup[-1,2)$.