Capitolul 7. Serii de puteri.

1. **Să se determine raza de convergenţă pentru următoarele serii de puteri:**

1.1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{n+2}x^n.$

1.2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} 10^n x^n.$

1.3. $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$

1.4. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n\cdot 5^{n-1}}.$

1.5. $\sum\limits_{n\geqslant 0} n!x^n.$

1.6. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}.$

1.7. $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^n x^n.$

1.8. $\sum\limits_{n\geqslant 1} 3^{n^2} x^n.$

1.9. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}.$

1.10. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}.$

1.11. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{2n+1}{3n^2+2}(x-1)^n.$

1.12. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{2^{n+1}(x+1)^{n+1}}{(n+1)\ln^2(n+2)}.$

1.13. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{3^n n}{n^n}(x-1)^{2n}.$

1.14. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\left(\frac{nx}{e}\right)^n.$

1.15. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}3^n}(x-1)^n.$

1.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n+1}x^n.$

1.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2+(-1)^n\right)^n}{n}(x-1)^n.$

1.18. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^n (x+1)^n.$

1.19. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n (x-2)^n.$

1.20. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\frac{n+3}{n+6}\right)^{n^2} x^n.$

2. Să se determine mulţimile de convergenţă pentru seriile următoare:

2.1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

2.2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^n(x-2)^n$.

2.3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^n$.

2.4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{3^n n^3}(x-1)^{2n}$.

2.5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}2^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^2}(x-1)^n$.

2.6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-2)^n$.

2.7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$.

2.8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

2.9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n}}(x+1)^n$.

2.10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}x^{2n}$.

2.11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(x+7)^{3n}}{n^2}$.

2.12. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-3)^n x^{2n}$.

2.13. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}\frac{(x-4)^{2n+1}}{2n+1}$.

2.14. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^3}{(n+1)!}(x-5)^{2n+1}$.

2.15. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(x-2)^n}{2^n(n+1)(n+2)}$.

2.16. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^n}{(2n-1)^2\sqrt{5^{n-1}}}x^n$.

2.17. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{n^n}(x-3)^n$.

2.18. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\ln^n(n+1)}(x-1)^n$.

2.19. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n}{\sqrt{2^n}}(x-1)^n$.

2.20. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^{n^2-1}}{n}x^{n^2}$.

3. Să se dezvolte în serie MacLaurin funcţiile:

3.1. $f(x) = e^{-x^2}$.

3.2. $f(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$.

3.3. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^3)^2}$.

3.4. $f(x) = e^{-x}$.

3.5. $f(x) = \operatorname{tg} x$.

3.6. $f(x) = x \operatorname{ctg} x$.

3.7. $f(x) = \operatorname{ch}\, x$.

3.8. $f(x) = \operatorname{sh}\, x$.

3.9. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

3.10. $f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$.

3.11. $f(x) = e^x \sin x$.

3.12. $f(x) = \ln(1-x)$.

3.13. $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.14. $f(x) = \arcsin x$.

3.15. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.16. $f(x) = \ln\sqrt{1-x}$.

3.17. $f(x) = \dfrac{5x+1}{x+3}$.

3.18. $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+x-6}$.

3.19. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)(x^2+4)}$.

3.20. $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x^2-1)}$.